Modélisation d'un fluide diphasique à faible nombre de Mach avec forts transferts de chaleur

Bérénice GREC[1]

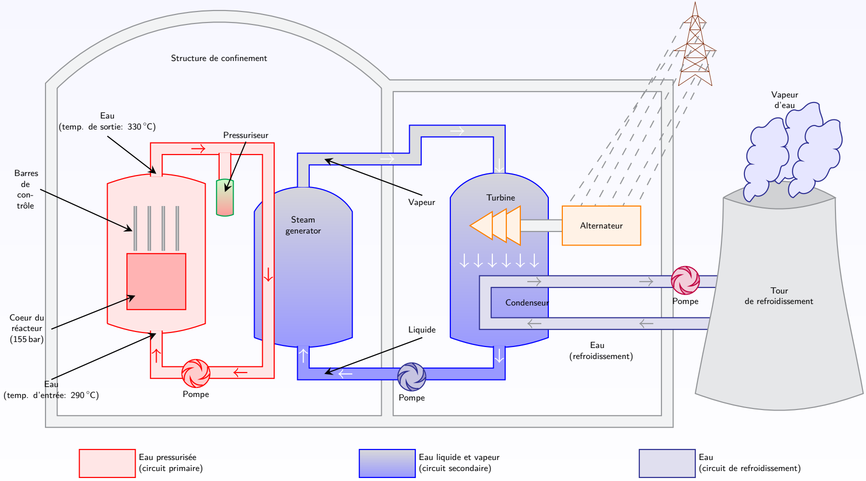
en collaboration avec S. DELLACHERIE, G. FACCANONI et Y. PENEL

[1]MAP5 – Université Paris Descartes, France

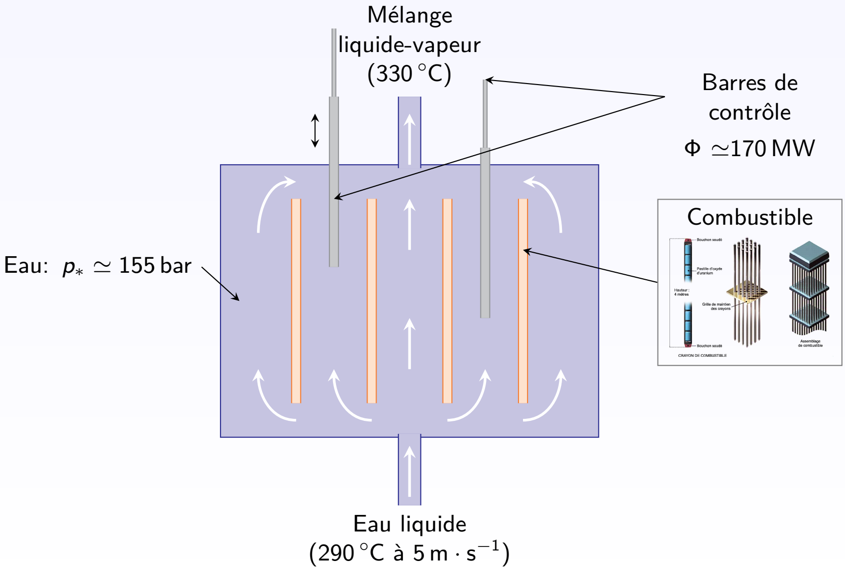
Séminaire EDP de l'IRMAR, Rennes, 17 janvier 2019

Plan de l'exposé

Réacteur à Eau Pressurisée (REP)



Coeur d'un Réacteur à Eau Pressurisée (REP)



Faible nombre de Mach : quel modèle pour ce régime ?

Régime nominal

- Vitesse d'entrée : $|\boldsymbol{u}| \simeq 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
- Vitesse du son à $p_0 = 155\,\mathrm{bar}$ et $T = 300\,°\mathrm{C}$: $c_\ell^* \simeq 1.0 \times 10^3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
- nombre de Mach (mesure la compressibilité de l'écoulement) :

$$\mathrm{Ma} = \frac{|\boldsymbol{u}|}{c_\ell^*} \simeq 5 \times 10^{-3} \ll 1$$

Choix du modèle :

- Navier-Stokes/Euler compressible ?
- Incompressible ?
- Modèle adapté au régime bas Mach ?

Phénomènes acoustiques négligeables (pas d'ondes de choc)
MAIS grands transferts de chaleur : $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \neq 0$
$\Rightarrow$ Modèle asymptotique à bas nombre de Mach

De Navier-Stokes compressible au modèle LMNC

Système de Navier-Stokes compressible

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho h) + \operatorname{div}(\rho h \boldsymbol{u}) = \Phi + \operatorname{div}\big(\lambda \nabla T\big) + \partial_t p + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \sigma(\boldsymbol{u}) :: \sigma(\boldsymbol{u}), \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div} \sigma(\boldsymbol{u}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{g}. \end{cases}$$

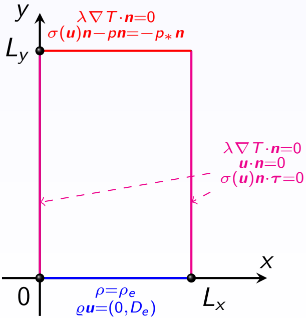
- Inconnues
  - $(t, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{u}$: vitesse
  - $(t, \boldsymbol{x}) \mapsto h$: enthalpie
  - $(t, \boldsymbol{x}) \mapsto p$: pression
  - ρ, T : densité et température liées à h et p par la loi d'état
- Données
  - $(t, \boldsymbol{x}) \mapsto \Phi \geq 0$: densité de puissance
  - $\boldsymbol{g}$: gravité
  - λ : conductivité thermique
  - $\sigma(\boldsymbol{u})$: tenseur de contraintes (viscosité)

De Navier-Stokes compressible au modèle LMNC

Système de Navier-Stokes compressible

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho h) + \mathrm{div}(\rho h \boldsymbol{u}) = \Phi + \mathrm{div}\big(\lambda \nabla T\big) + \partial_t p + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \sigma(\boldsymbol{u}) :: \sigma(\boldsymbol{u}), \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}\, \sigma(\boldsymbol{u}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{g}. \end{cases}$$

- Conditions limites



De Navier-Stokes compressible au modèle LMNC

Système de Navier-Stokes compressible

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho h) + \mathrm{div}(\rho h \boldsymbol{u}) = \Phi + \mathrm{div}\big(\lambda \nabla T\big) + \partial_t p + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}\, \sigma(\boldsymbol{u}) + \dfrac{1}{\varepsilon^2} \nabla p = \rho \boldsymbol{g}. \end{cases}$$

- Adimensionnement Ma $= \varepsilon$ et développement asymptotique

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

- $\nabla p^{(0)} = \nabla p^{(1)} = 0$ avec la condition limite de sortie indépendante de t

$$\Longrightarrow p(t, \boldsymbol{x}) = p_* + \varepsilon^2 \bar{p}(t, \boldsymbol{x}).$$

La pression est décomposée entre une partie thermodynamique constante p_* et une partie dynamique d'ordre ε^2 $\bar{p}$.

Modèle à faible nombre de Mach

Modèle LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \dfrac{\beta(h,p_*)}{p_*}\left[\Phi + \operatorname{div}\Big(\Lambda(h,p_*)\nabla h\Big)\right], \\ \rho(h,p_*)\Big(\partial_t h + \boldsymbol{u}\cdot\nabla h\Big) = \Phi + \operatorname{div}\Big(\Lambda(h,p_*)\nabla h\Big), \\ \rho(h,p_*)\Big(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\Big) + \nabla\bar{p} = \operatorname{div}(\sigma(\boldsymbol{u})) + \rho(h,p_*)\boldsymbol{g}. \end{cases}$$

- Coefficient de compressibilité $\beta(h,p_*) = -\dfrac{p_*}{\rho^2}\dfrac{\partial\rho}{\partial h}(h,p_*)$
- Equation d'état : analytique ou tabulée

  $\rightsquigarrow$ par exemple, gaz raidis (SG) : $\rho(h,p_*) = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p_*+\pi}{h-q}$
- Réécriture du terme de diffusion thermique

$$\lambda(h,p_*)\nabla T = \frac{\lambda(h,p_*)}{c_p(h,p_*)}\nabla h = \Lambda(h,p_*)\nabla h$$

- Tenseur de contraintes $\sigma(\boldsymbol{u}) = \mu(h,p_*)\left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right) + \eta(h,p_*)(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\,\mathbf{Id}$

Modèle à faible nombre de Mach

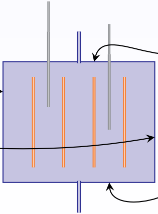
Modèle LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \dfrac{\beta(h, p_*)}{p_*} \Big[\Phi + \operatorname{div}\Big(\Lambda(h, p_*) \nabla h\Big) \Big], \\ \rho(h, p_*) \Big(\partial_t h + \boldsymbol{u} \cdot \nabla h \Big) = \Phi + \operatorname{div}\Big(\Lambda(h, p_*) \nabla h\Big), \\ \rho(h, p_*) \Big(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} \Big) + \nabla \bar{p} = \operatorname{div}(\sigma(\boldsymbol{u})) + \rho(h, p_*) \boldsymbol{g}. \end{cases}$$

Conditions initiales + conditions limites

Glissement + adiabatique

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \\ \sigma(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \\ \Lambda \nabla h \cdot \boldsymbol{n} = 0 \end{cases}$$



Sortie libre + adiabatique

$$\begin{cases} \sigma(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{n} - \bar{p} \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \\ \Lambda \nabla h \cdot \boldsymbol{n} = 0 \end{cases}$$

Entrée

$$\begin{cases} \rho = \rho_e(t, x), \\ \rho \boldsymbol{u} = (0, D_e(t, x)) \end{cases}$$

Analyse de modèles bas Mach

- Applications en combustion : Majda, Klein, ...
- Applications en astrophysique : Colella, Almgren, ...
- Applications dans le nucléaire : Bell, Paillère, Dellacherie, ...

Etudes théoriques

- Klainerman & Majda ('81, '82) : modèles barotropiques (certains domaines)
- Schochet ('94) : convergence pour Euler barotropique pour toute CI
- Desjardins, Grenier, Lions & Masmoudi ('99) : cas de domaines bornés
- Danchin ('01, '05) : extension aux espaces de Besov spaces
- Alazard ('05) : extension à des équations d'état générales

Aspects numériques

- Klein ('95): splitting d'opérateurs
- Guillard *et al.* ('99, '04, '08) : dvt. asymptotique en Ma dans les schémas
- Dellacherie *et al.* ('10, '13) : analyse de schémas à l'aide de la décomposition de Schochet, stabilité des noyaux discrets

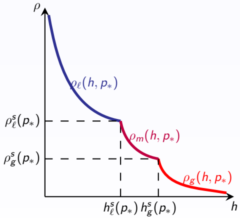
Plan de l'exposé

Loi d'état diphasique

- Le liquide $\kappa = \ell$ et la vapeur $\kappa = g$ sont caractérisés par leurs propriétés thermodynamiques : $(h, p_*) \mapsto \rho_\kappa$
- Dans le mélange, équilibre entre les phases liquides et vapeur : $T = T^s(p_*)$. On définit les valeurs à saturation

$$h^s_\kappa(p_*) \overset{\text{def}}{=} h_\kappa\big(p_*, T^s(p_*)\big), \qquad \rho^s_\kappa(p_*) \overset{\text{def}}{=} \rho_\kappa\big(h^s_\kappa, p_*\big).$$

$$\boxed{\rho(h, p_*) = \begin{cases} \rho_\ell(h, p_*), & \text{si } h \leq h^s_\ell(p_*), \\ \rho_m(h, p_*) & \text{si } h^s_\ell(p_*) < h < h^s_g(p_*), \\ \rho_g(h, p_*), & \text{si } h \geq h^s_g(p_*). \end{cases}}$$



Loi d'état dans le mélange

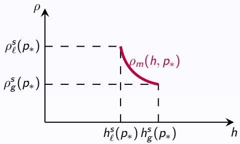
En définissant α la fraction de volume de la phase vapeur, l'équilibre donne

$$\begin{cases} \rho = \alpha\rho_g^s(p_*) + (1-\alpha)\rho_\ell^s(p_*) \\ \rho h = \alpha\rho_g^s(p_*)h_g^s(p_*) + (1-\alpha)\rho_\ell^s(p_*)h_\ell^s(p_*) \end{cases} \qquad \text{pour } h \in [h_\ell^s(p_*); h_g^s(p_*)]$$

$$\Downarrow$$

Expression de la densité

$$\boxed{\rho_m(h,p_*) = \frac{p_*/\beta_m(p_*)}{h - q_m(p_*)}}$$



où

$$\beta_m(p_*) \stackrel{\text{def}}{=} p_* \frac{\frac{1}{\rho_g^s} - \frac{1}{\rho_\ell^s}}{h_g^s - h_\ell^s} = -\frac{p_*}{\rho_m(h,p_*)} \left.\frac{\partial \rho_m}{\partial h}\right|_{p_*} \qquad q_m(p_*) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho_g^s h_g^s - \rho_\ell^s h_\ell^s}{\rho_g^s - \rho_\ell^s}$$

Loi d'état pour les phases pures: NASG

Loi des Noble Able Stiffened Gas (NASG)

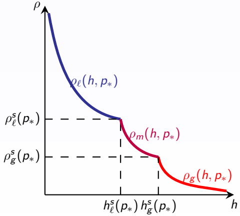
$$\frac{1}{\rho_\kappa}(h, p_*) = \frac{\gamma_\kappa - 1}{\gamma_\kappa}\frac{h - q_\kappa}{p_* + \pi_\kappa} + b_\kappa$$

- $\gamma_\kappa > 1$ coefficient adiabatique
- π_κ pression de référence
- q_κ énergie de liaison
- b_κ covolume

On obtient

$$\beta_\kappa(p_*) = -\frac{p_*}{\rho_\kappa^2(h, p_*)}\left.\frac{\partial \rho}{\partial h}\right|_{p_*} = \frac{\gamma_\kappa - 1}{\gamma_\kappa}\frac{p_*}{p_* + \pi_\kappa}$$

indépendant de h



Nouvelle expression de ρ

$$\boxed{\rho_\kappa(h, p_*) = \frac{p_*/\beta_\kappa(p_*)}{h - \hat{q}_\kappa(p_*)}, \qquad \hat{q}_\kappa(p_*) \stackrel{\text{def}}{=} q_\kappa - \frac{p_*}{\beta_\kappa(p_*)}b_\kappa}$$

Loi d'état pour les phases pures : données tabulées

κ	h_κ $[\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}]$	ϱ_κ $[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}]$	T_κ $[\mathrm{K}]$	$\cdots$	β_κ
ℓ	978.702	842.783	500.000	$\cdots$	✗
ℓ	980.223	842.359	500.336	$\cdots$	✗
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ℓ	1627.450	595.733	617.667	$\cdots$	✗
ℓ	h_ℓ^s=1629.880	594.379	T^s=617.939	$\cdots$	✗
g	h_g^s=2596.119	101.930	T^s=617.939	$\cdots$	✗
g	2596.965	101.816	618.00	$\cdots$	✗
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
g	3066.962	60.540	699.667	$\cdots$	✗
g	3068.184	60.473	700.000	$\cdots$	✗

Source : `http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/`

Les quantités c_κ^*, c_{p_κ}, c_{v_κ}, λ_κ, μ_κ sont aussi tabulées.

Loi d'état pour les phases pures : données tabulées à p_*

Mauvaise idée : fitting de ρ à partir des données tabulées

$$\rho_\kappa(h, p_*) \approx \tilde{\rho}_\kappa(h) := \sum_{j=0}^{d_{\rho,\kappa}} r_{\kappa,j} \left(\frac{h}{10^6}\right)^j$$

$$\implies \beta_\kappa(h, p_*) = -\frac{p_*}{\rho_\kappa^2(h, p_*)} \frac{\partial \rho_\kappa}{\partial h}(h, p_*) \approx \tilde{\beta}_\kappa(h) =?$$

Inconvénients

- Les valeurs à saturation ne sont pas vérifiées exactement
- Pas de monotonie ni de positivité a priori pour $\tilde{\rho}$ ou $\tilde{\beta}$
- Possibles instabilités dans le calcul de $\tilde{\beta}$

Loi d'état pour les phases pures : données tabulées à p_*

Nouvelle expression pour le coefficient de compressibilité :

$$\beta = \frac{p}{\rho c^* \sqrt{T}} \sqrt{\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}}$$

$\Longrightarrow$ fitting de β à partir des données tabulées pour T, c_v, c_p, c^*, ρ

$$\beta_\kappa(h, p_*) \approx \tilde{\beta}_\kappa(h) := \sum_{j=0}^{d_{\beta,\kappa}} b_{\kappa,j} \left(\frac{h}{10^6} \right)^j .$$

Reconstruction de ρ

$$\frac{1}{\rho}(h, p_*) \approx \frac{1}{\tilde{\rho}(h)} := \begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{\rho}_\ell}(h) := \dfrac{1}{\rho_\ell^s(p_*)} + \displaystyle\int_{h_\ell^s}^{h} \frac{\tilde{\beta}_\ell(h)}{p_*} dh, & \text{si } h \leq h_\ell^s, \\ \dfrac{1}{\tilde{\rho}_m}(h), & \text{si } h_\ell^s < h < h_g^s, \\ \dfrac{1}{\tilde{\rho}_g}(h) := \dfrac{1}{\rho_g^s(p_*)} + \displaystyle\int_{h_g^s}^{h} \frac{\tilde{\beta}_g(h)}{p_*} dh, & \text{si } h \geq h_g^s. \end{cases}$$

Loi d'état pour les phases pures : données tabulées à p_*

Nouvelle expression pour le coefficient de compressibilité :

$$\beta = \frac{p}{\rho c^* \sqrt{T}} \sqrt{\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}}$$

$\Longrightarrow$ fitting de β à partir des données tabulées pour T, c_v, c_p, c^*, ρ

$$\beta_\kappa(h, p_*) \approx \tilde{\beta}_\kappa(h) := \sum_{j=0}^{d_{\beta,\kappa}} b_{\kappa,j} \left(\frac{h}{10^6}\right)^j .$$

Proposition

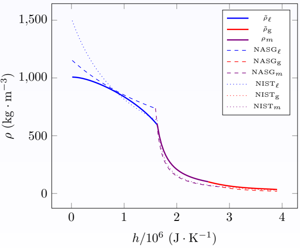
1. *La relation* $\tilde{\beta} = -\dfrac{p_*}{\tilde{\rho}^2} \dfrac{\partial \tilde{\rho}}{\partial h}$ *est vérifiée exactement ;*
2. $h \mapsto \tilde{\rho}(h)$ *est continue, positive et décroissante sur* (h_{min}, h_{max}).

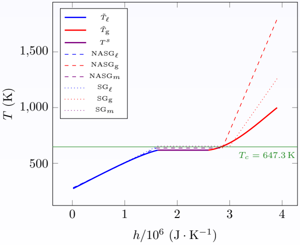
Choix du degré $d_{\beta,\kappa}$ selon la précision voulue

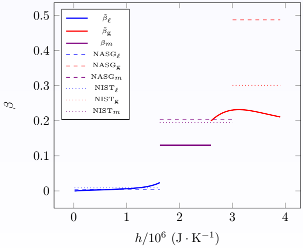
$\rightsquigarrow$ Même avec $d_{\beta,\kappa} = 0$, bien meilleurs résultats qu'avec les EOS analytiques de type (NA)SG

Comparaison des lois d'état

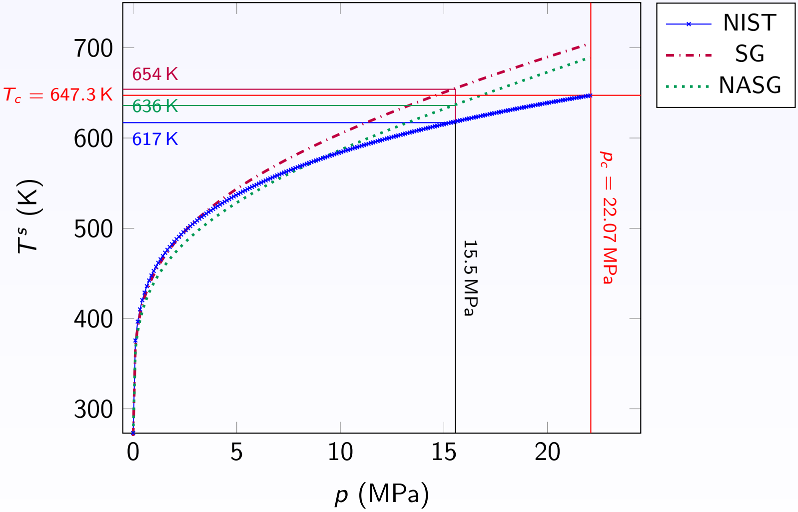
	SG	NASG	NIST
h_ℓ^s	$1.627 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$	$1.596 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$	$1.629 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$
h_g^s	$3.004 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$	$2.861 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$	$2.596 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$
ρ_ℓ^s	$632.663\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$	$737.539\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$	$594.38\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
ρ_g^s	$52.937\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$	$55.486\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$	$101.93\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
T^s	$654.65\ \mathrm{K}$	$636.47\ \mathrm{K}$	$617.939\ \mathrm{K}$







Comparaison des lois d'état



Il s'agit ici d'une loi d'état incomplète adaptée à l'approche bas Mach où $p = p_*$!

Données tabulées pour la diffusion thermique

On peut aussi utiliser cette approche (indépendamment) pour définir $T(h, p_*)$ et $c_p(h, p_*)$.

Fitting de $1/c_p$ à partir des données tabulées

$$\frac{1}{c_{p\,\kappa}(h, p_*)} \approx \frac{1}{\tilde{c}_{p\,\kappa}(h)} := \sum_{j=0}^{d_{c_p,\kappa}} c_{\kappa,j} \left(\frac{h}{10^6}\right)^j .$$

Reconstruction de T

$$T(h, p_*) \approx \tilde{T}(h) := \begin{cases} \tilde{T}_\ell(h) := T^s + \displaystyle\int_{h_\ell^s}^{h} \frac{1}{\tilde{c}_{p\,\ell}(h)} dh, & \text{si } h \leq h_\ell^s, \\ T^s, & \text{si } h_\ell^s < h < h_g^s, \\ \tilde{T}_g(h) := T^s + \displaystyle\int_{h_g^s}^{h} \frac{1}{\tilde{c}_{p\,g}(h)} dh, & \text{si } h \geq h_g^s. \end{cases}$$

Pour les quantités dont les variations sont faibles sur la plage de h considérée (μ, λ, ...), on peut utiliser la même approche avec $d = 0$.

Plan de l'exposé

Modèle en 1D sans diffusion thermique

$$\begin{cases} \partial_y v = \frac{\beta(h,p_*)}{p_*}\Phi = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)^2}\Phi, \\ \rho(h)(\partial_t h + v\partial_y h) = \Phi, \\ \rho(h)(\partial_t v + v\partial_y v) + \partial_y \bar{p} = \partial_y(\mu\partial_x v) - \rho(h)g. \end{cases}$$

Solution stationnaire pour une loi d'état quelconque

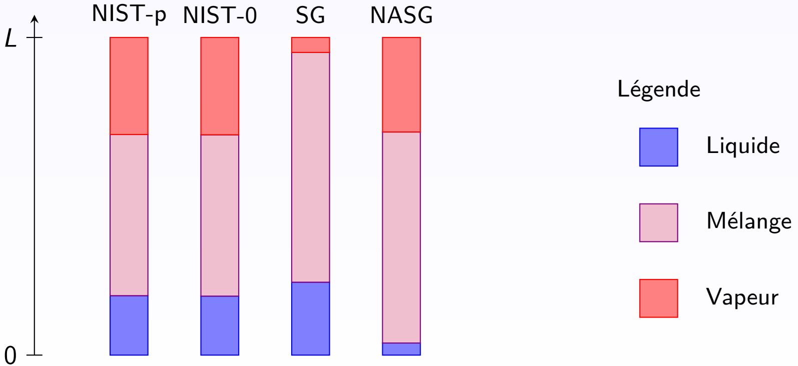
1. On observe que $\rho(h)v$ est constant (égal à D_e), donc $\boxed{v^\infty(y) = \dfrac{D_e}{\rho(h^\infty(y))}}$
2. On déduit l'enthalpie :

$$\boxed{h^\infty(y) = h_e + \frac{\Psi(y)}{D_e}, \qquad \text{où } \Psi(y) := \int_0^y \Phi^\infty(z)\,\mathrm{d}z}$$

3. Pression dynamique $\bar{p}$: intégration de la troisième équation

Modèle en 1D sans diffusion thermique

$$\begin{cases} \partial_y v = \frac{\beta(h,p_*)}{p_*}\Phi = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)^2}\Phi, \\ \rho(h)(\partial_t h + v\partial_y h) = \Phi, \\ \rho(h)(\partial_t v + v\partial_y v) + \partial_y \bar{p} = \partial_y(\mu\partial_x v) - \rho(h)g. \end{cases}$$



Modèle en 1D sans diffusion thermique

Influence du chauffage et choix du modèle : solutions stationnaires (gaz parfait monophasique, sans viscosité ni gravité, Φ, h_e, v_e constants)

- Euler compressible sans Φ

$$h^\infty = h_e, \qquad v^\infty = v_e$$

- Euler compressible avec Φ [1]

$$\begin{cases} h^\infty = h_e \dfrac{2\gamma\tilde{p}_e + \gamma - 1 + \tilde{\Phi}y}{\gamma(\tilde{p}_e+1) + \sqrt{(\gamma\tilde{p}_e+1)^2 - (\gamma^2-1)\tilde{\Phi}y}}, \\ v^\infty = \dfrac{v_e}{\gamma+1}\left(\gamma(\tilde{p}_e+1) - \sqrt{(\gamma\tilde{p}_e-1)^2 - (\gamma^2-1)\tilde{\Phi}y}\right) \end{cases}$$

- modèle bas Mach avec Φ

$$h^\infty = h_e + \frac{\Phi}{\rho_e v_e} y, \qquad v^\infty = v_e + \frac{\beta\Phi}{p_0} y$$

- incompressible avec Φ (approximation de Boussinesq)

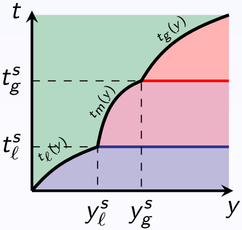
$$h^\infty = h_e + \frac{\Phi}{\rho_e v_e} y, \qquad v^\infty = v_e$$

[1] $\tilde{\Phi} = 2\Phi/\rho_e v_e^3$, $\tilde{p}_0 = p_0/\rho_e v_e^2$, $\tilde{p}_e = \left(1 - \tilde{p}_0 + \sqrt{(\gamma\tilde{p}_0 - 1)^2 + \tilde{\Phi}L}\right)/(\gamma-1)$.

Modèle en 1D sans diffusion thermique

Solution exacte avec changement de phase (NASG)

Φ, v_e, h_e, h_0 : constants; CI et CL : phase liquide.



$$y_\ell^s = \frac{D_e}{\Phi}(h_\ell^s - h_e)$$
$$y_g^s = \frac{D_e}{\Phi}(h_g^s - h_e)$$
$$t_\ell^s = \frac{1}{\hat{\Phi}_\ell} \ln\left(\frac{h_\ell^s - \hat{q}_\ell}{h_0 - \hat{q}_\ell}\right)$$
$$t_g^s = t_\ell^s + \frac{1}{\hat{\Phi}_m} \ln\left(\frac{h_g^s - \hat{q}_m}{h_\ell^s - \hat{q}_m}\right)$$

Enthalpie: méthode des charactéristiques appliquée à $\partial_t h + v\partial_y h = \frac{\beta(h)\Phi}{p_*}(h - \hat{q}(h))$.

$$\boxed{h(t,y) = \begin{cases} q_\ell + (h_0 - \hat{q}_\ell)e^{\hat{\Phi}_\ell t} & \text{si } (t,y) \in \mathcal{L} \text{ et } t < t_\ell(y), \\ q_m + (h_\ell^s - \hat{q}_m)e^{\hat{\Phi}_m (t - t_\ell^s)} & \text{si } (t,y) \in \mathcal{M} \text{ et } t < t_m(y), \\ q_g + (h_g^s - \hat{q}_g)e^{\hat{\Phi}_g (t - t_g^s)} & \text{si } (t,y) \in \mathcal{G} \text{ et } t < t_g(y), \\ h_e + \frac{\Phi}{D_e} y & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Modèle en 2D sans diffusion thermique

Existence (en temps court) pour le modèle LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \dfrac{\beta(h,p_*)}{p_*}\Phi, \\ \rho(h,p_*)\Big(\partial_t h + \boldsymbol{u}\cdot\nabla h\Big) = \Phi, \\ \rho(h,p_*)\Big(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\Big) + \nabla\bar{p} = \operatorname{div}(\sigma(\boldsymbol{u})) + \rho(h,p_*)\boldsymbol{g}. \end{cases}$$

En système fermé (glissement sur tous les bords)

- Linéarisation (itérées de Picard)
- Estimations d'énergie : itérées bornées dans des espaces fonctionnels réguliers
  - Equation de transport
  - Equation type Navier-Stokes (décomposition de Hodge)
- Contraction dans des espaces fonctionnels moins réguliers
- Grönwall $\rightsquigarrow$ convergence, existence en temps court
- Unicité

Modèle en 2D sans diffusion thermique

Existence (en temps court) pour le modèle LMNC

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \dfrac{\beta(h, p_*)}{p_*}\Phi, \\ \rho(h, p_*)\Big(\partial_t h + \boldsymbol{u} \cdot \nabla h\Big) = \Phi, \\ \rho(h, p_*)\Big(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}\Big) + \nabla \bar{p} = \operatorname{div}(\sigma(\boldsymbol{u})) + \rho(h, p_*)\boldsymbol{g}. \end{cases}$$

Avec les conditions limites physiques

- Equation type Navier-Stokes :

  ⇝ adaptation de la condition limite en sortie (sortie libre)

$$\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} - \bar{p}\boldsymbol{n} - \frac{1}{2}\rho\left(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\right)^{-} = 0$$

  ⇝ adaptation de la décomposition de Hodge aux conditions limites

- Equation de transport :

  ⇝ on ne contrôle pas le signe du terme en sortie...

  ⇝ utilisation de la formule explicite pour les caractéristiques :

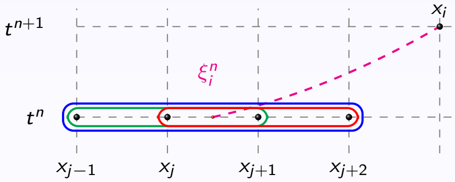
  - compatibilité entre les domaines utilisant condition initiale/limite...
  - régularité aux interfaces entre ces domaines...

Plan de l'exposé

Transport : Méthode des caractéristiques

Schéma à stencil adaptatif :

- vérifie le principe du maximum
- inconditionnellement stable (L^∞, L^2), ordre 2 en espace



- Détermination du pied de la caractéristique ξ_i^n, et $\theta_{ij}^n = \dfrac{x_{j+1} - \xi_i^n}{\Delta x}$
- Choix du stencil pour vérifier le principe du maximum, montée à l'ordre 3

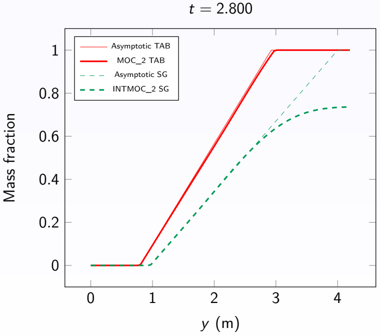
$$\hat{h}_i^n := \alpha_{ij}^n \mathcal{H}^\ell(h_{j-1}, h_j, h_{j+1}) + (1 - \alpha_{ij}^n)\mathcal{H}^r(h_j, h_{j+1}, h_{j+2}), \text{ avec } \alpha_{ij}^n = \frac{1 + \theta_{ij}^n}{3}$$

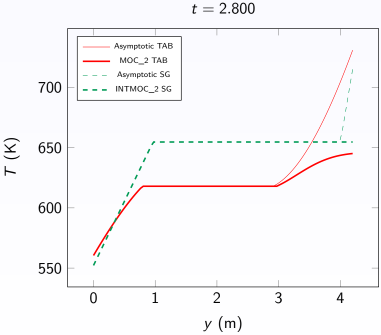
- Avancée en temps : $\dfrac{h_i^{n+1} - \hat{h}_i^n}{\Delta t} = \dfrac{\Phi(t^n, \xi_i^n)}{\rho(\hat{h}_i^n, p_*)}$

Transport : Méthode des caractéristiques

Pour une loi d'état NASG, le schéma peut-être modifié en une formulation intégrée plus précise.

$$D_e = 375\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1},\ \rho_e = 750\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3},\ \Phi = 170\times 10^6\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-3}$$





Formulation faible

- Formulation équivalente

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \dfrac{\beta(h)}{p_0}[\Phi + \operatorname{div}(\Lambda(h)\nabla h)] = \dfrac{\beta(h)\rho(h)}{p_0}[\partial_t h + \boldsymbol{u}\cdot\nabla h] \\ \rho(h)\Big(\partial_t h + \boldsymbol{u}\cdot\nabla h\Big) = \Phi + \operatorname{div}(\Lambda(h)\nabla h) \\ \rho(h)\Big(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\Big) + \nabla\bar{p} = \operatorname{div}(\sigma(\boldsymbol{u})) + \rho(h)\boldsymbol{g} \end{cases}}$$

- Permet d'éviter des termes de bord (après IPP) sur $\{\boldsymbol{x}\in\Omega \,:\, h(t,\boldsymbol{x}) = h^s_\kappa\}$, et donc
  - d'augmenter la régularité de l'espace fonctionnel de p_{test}
  - d'approcher $\dfrac{\partial\beta}{\partial h}$

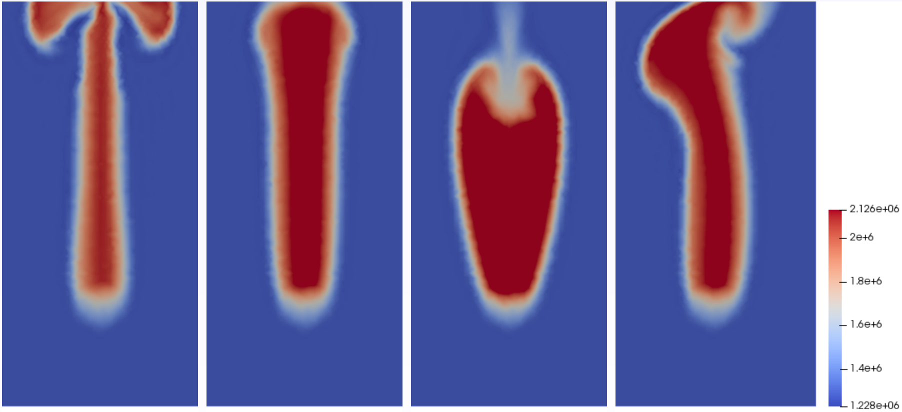
  et numériquement, à chaque pas de temps,
  - de déterminer les zones $h(t^n,\cdot) = h^s_\kappa$,
  - de remailler pour capturer ces zones.

Cas test avec chauffage localisé et changement de phase

$$D_e = 375\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1},\ \rho_e = 750\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3},\ \Phi = 170\times 10^6\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-3}\mathbb{1}_D$$

Influence de la gravité

Enthalpie pour différentes orientations de $\boldsymbol{g}$ (avec changement de phase)



(a) $\boldsymbol{g} = (0, -g)$ (b) $\boldsymbol{g} = (0, 0)$ (c) $\boldsymbol{g} = (0, g)$ (d) $\boldsymbol{g} = (g, 0)$

Instabilité de Rayleigh-Taylor / Gravité en compétition avec la convection

Plan de l'exposé

Travaux en cours et perspectives

- Analyse du modèle : régularité de l'équation de transport, puis existence en temps long
- Développement d'une hiérarchie de modèles (relaxation des différents équilibres), convergences des modèles
- Analyse du modèle avec diffusion thermique (discontinuité de Λ)
- Code 3D en cours de développement (C. Galusinski, G. Faccanoni) : adaptation d'un code incompressible
- Couplage avec des équations simplifiées de neutronique pour déterminer Φ
- Enrichissement de la modélisation thermodynamique

Merci de votre attention!