

Optimisation

LICENCE L3

Devoir maison n°1 à rendre pour le 3 novembre 2009

Exercice 1 Soit E l'espace des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Si $P, Q \in E$, on considère :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^3 a_k Q^{(k)}(0),$$

avec $P(x) = \sum_{k=0}^3 a_k x^k$, si $x \in \mathbb{R}$, et $Q^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de Q .

- (a) Montrer que $\langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire.
(b) Donner la dimension de E .
(c) Déterminer des réels a, b, c, d, e, f tels que $Q_0(x) = a$, $Q_1(x) = bx + c$ et $Q_2(x) = dx^2 + ex + f$, $x \in \mathbb{R}$ forment une base orthonormée de F , le sous-espace des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ précédemment défini.
- Soit (Q_0, Q_1, Q_2) une base orthonormée de F muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
 - Montrer que si $Q \in F$ alors $Q = \sum_{i=0}^2 \langle Q, Q_i \rangle Q_i$.
 - Montrer que si $Q \in E$, la projection orthogonale de Q sur F est donnée par

$$p(Q) = \sum_{i=0}^2 \langle Q, Q_i \rangle Q_i.$$

- On pose $Q(x) = x^3 + 5x^2 - 10x + 6$. Calculer $\|Q - p(Q)\|^2$.
- En déduire $\text{dist}(Q, F)$.

Exercice 2 Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$, $J(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3$, et l'on considère l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / q(x) = 1\}$.

- Montrer que q est une forme quadratique définie positive.
- Déterminer le produit scalaire $[\cdot, \cdot]$ associé et écrire la matrice associée dans la base canonique.
- Déterminer $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $J(x) = [\alpha | x]$.
- Est-ce que J atteint son maximum, resp. minimum, sur S ? Justifiez.
- Déterminer $\min_{x \in S} J(x)$ et $\max_{x \in S} J(x)$ et les points où les extremums sont atteints.