Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2009-2010

Optimisation

LICENCE L3

Feuille d'exercices n°1

1. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on définit les normes :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \|x\|_2 = \Big(|x_1|^2 + |x_2|^2\Big)^{1/2} \text{ et } \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|).$$

   (a) Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \text{ et } \|x\|_1 \le \sqrt{2}\|x\|_2 \le 2\|x\|_\infty.$$

   (b) Dessiner les boules unités associées à chacune des normes précédentes.

2. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on pose $N(x) = a|x_1| + b|x_2|$.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessiner les vecteurs unitaires pour $a = 2$ et $b = 1$.
   (b) Lorsque N est une norme, déterminer des réels k, $k' > 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^2 \ : \ k\,N(x) \le \|x\|_2 \le k'\,N(x)$.

3. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on pose $N(x) = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.
   (a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^3$.
   (b) Étudier la rapport $\frac{N(x)}{\|x\|_2}$. Déterminer l'infimum et le supremum sur $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer des réels k, $k' > 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^3 \ : \ k\,N(x) \le \|x\|_2 \le k'\,N(x)$ lorsque N est une norme.

4. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^2$. Soient a et b deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^2$, on pose $f(x) = N(x - a) + N(b - x)$.
   (a) Montrer que $f(x) \ge N(a - b)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer $f(x)$ lorsque $x \in [a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b; \lambda \ \in [0, 1]\}$.
   (c) En déduire que $\inf_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ est atteint sur le segment $[a, b]$.
   (d) Quel est l'ensemble défini par $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x - a\|_2 = \|x - b\|_2\}$?
   (e) Montrer que $\inf_{x\in\mathbb{R}^2, x\in\mathcal{D}} f(x)$ est atteint.

5. Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles 2×2 et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle que si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, la norme infini de x est donné par $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$.
   (a) Montrer que $x \mapsto \|Ax\|_\infty$ est continue.

(b) Vérifier que $\{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\|_\infty = 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. En déduire que l'on peut définir

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty .$$

(c) Montrer que $\|A\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 ; x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\|_\infty \leq 1} \|Ax\|_\infty$ et vérifier que $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}|$.

(d) Montrer que $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui satisfait $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

6. On note E l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (a) Si $f \in E$, on définit $\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$. Vérifier que $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur E.

   (b) Si $f \in E$, on définit $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)| dt$. Vérifier que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur E.

   (c) Montrer que $\|f\|_1 \leq 2 \|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$ mais que les normes $\| \cdot \|_\infty$ et $\| \cdot \|_1$ ne sont pas équivalentes.

   (d) On rappelle que $(E, \| \cdot \|_\infty)$ est complet. Montrer que $(E, \| \cdot \|_1)$ ne l'est pas.

   (e) On définit $T : f \in E \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$. Montrer que T est une forme linéaire. Est-elle continue sur $(E, \| \cdot \|_\infty)$? Si oui calculer sa norme. Même question sur $(E, \| \cdot \|_1)$?

   (f) On note $F = \{p : [-1, 1] \to \mathbb{R} ; p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 ; (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\}$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. Montrer que T est continue sur $(F, \| \cdot \|_1)$.

7. On note $L^1(\Omega)$ l'espace des variables aléatoires réelles X vérifiant $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$.

   (a) Si $X \in L^1(\Omega)$, on définit $\|X\|_1 = \mathbb{E}(|X|)$. Vérifier que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur $L^1(\Omega)$ lorsque l'on identifie 2 variables aléatoires égales presque sûrement.

   (b) On définit $T : X \in L^1(\Omega) \mapsto \mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$. Montrer que T est une forme linéaire. Est-elle continue sur $(E, \| \cdot \|_1)$? Si oui calculer sa norme.

8. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de E telles que

$$\lim_{n \to +\infty} N(u_n - v_n) = 0.$$

   (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est.

   (b) On suppose de plus que (E, N) est complet. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.