Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2009-2010

Optimisation

LICENCE L3

Feuille d'exercices n°2

1. Soit E un espace vectoriel réel ; déterminer, parmi les applications $(x, y) \longmapsto \langle x\ ,\ y\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire dans E :
   (a) $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et $w\ :\ [a, b] \longrightarrow]0, +\infty[$ une fonction continue fixée
   $$< f\ ,\ g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx$$
   (b) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et à coefficients réels et $< M\ ,\ N > = Tr\ (MN)$ où Tr est la trace .
   (c) $E = \mathcal{H}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à 2 variables homogènes de degré n et
   $$< P\ ,\ Q > \ = \sum_{i+j=n} a_{ij} \frac{\partial^n Q}{\partial x^{\,i} \partial y^{\,j}}\,(x, y) \quad \text{si} \quad P(x, y) \ = \sum_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j .$$

2. Soit $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien $\langle\cdot,\cdot\rangle$, avec $\|\cdot\|_2$ la norme associée. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on pose
   $$\phi(x, y) = \langle x, f(y)\rangle.$$
   (a) Montrer que ϕ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $|\phi(x, y)| \leq \|f\|\|x\|_2\|y\|_2$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$. En déduire que ϕ est continue sur $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
   (b) Vérifier que $\phi(e_i, e_j) = a_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2$ et en déduire que ϕ est symétrique si et seulement si $a_{1,2} = a_{2,1}$, ie $A = {}^t A$.
   (c) Montrer que la forme quadratique associée à ϕ s'écrit pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
   $$q(x) = \phi(x, x) = a_{1,1} x_1^2 + a_{2,1} x_1 x_2 + a_{1,2} x_2 x_1 + a_{2,2} x_2^2.$$
   (d) ϕ définit-elle un produit scalaire lorsque
      i. $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = a_{2,1} = 2$ et $a_{2,2} = 5$;
      ii. $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = a_{2,1} = 2$ et $a_{2,2} = 4$;
      iii. $a_{1,1} = -1$, $a_{1,2} = a_{2,1} = 2$ et $a_{2,2} = 4$;
   (e) Montrer que si $X = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(y)$ alors $\phi(x, y) = {}^t Y A X$.

(f) On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A =^t PP$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que ϕ soit un produit scalaire.

3. *Partiel 2008.* Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

   1) Montrer que $(A, B) \mapsto < A, B >:= \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur E. On note N la norme associée ($N(A)^2 = \mathrm{tr}({}^tAA)$).
   2) Soient A et B dans E. Montrer que $N(AB)^2 \leq N(A)^2N(B)^2$, puis que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.
   3) a) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in E$. Calculer $|\mathrm{tr}A|^2$ et $N(A)^2$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$.
      b) Montrer que $|\mathrm{tr}A|^2 \leq nN(A)^2$.
      c) Montrer que $|\mathrm{tr}A|^2 = nN(A)^2$ si et seulement si A est proportionnelle à la matrice identité I_n.

4. Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels. Pour deux polynômes p et q, on définit $\langle p, q\rangle$ par :
$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$
   (a) Montrer que $\langle\cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E. Quelle est la norme associée, notée $\|\cdot\|$?
   (b) Montrer que les polynômes pairs sont orthogonaux aux polynômes impairs.
   (c) Soient $n+1$ polynômes $p_0, p_1, p_2, ..., p_n$ tels que $(\forall i,\ p_i \neq 0)$, et $(\forall i, j,\ i \neq j \Longrightarrow \langle p_i, p_j\rangle = 0)$, montrer que la famille $(p_i)_{i=0,\ldots,n}$ est libre.
   (d) On veut construire une base p_0, p_1, p_2 de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à deux qui soit orthogonale. On pose $p_0 = 1$, on cherche p_1 et p_2 sous la forme de $p_1(t) = t+a$ et $p_2(t) = t^2 + bt + c$. Déterminer les valeurs de (a, b, c) pour que p_0, p_1, p_2 soit une famille orthogonale.
   (e) On pose $q(t) = t^2$. Vérifier que $\|q - ap_0 - bp_1\| \geq 2\sqrt{2}/3\sqrt{5}$, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

5. Soit $\{(x_i, y_i); 1 \leq i \leq n\}$ un nuage de points. On cherche la droite de régression de y en fonction de x ie $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que
$$F(a_0, b_0) = \min_{a,b\in\mathbb{R}} F(a, b) \text{ avec } F(a, b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2.$$
   On se place sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ muni du produit scalaire euclidien $\langle\cdot, \cdot\rangle$. On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $e_0 = (1, \ldots, 1)$.
   (a) Soit $z \in \mathbb{R}^n$. On pose $\overline{z} = \frac{1}{n}\langle z, e_0\rangle$. Montrer que la projection orthogonale de z sur $\mathrm{Vect}(e_0)$ est donnée par $\overline{z}e_0$.
   (b) En déduire que $\|z\|_2^2 = \|z - \overline{z}e_0\|^2 + n\overline{z}^2$.
   (c) Pour $z, z' \in \mathbb{R}^n$ on pose $\mathrm{cov}(z, z') = \frac{1}{n}\langle z, z'\rangle - \overline{z}\overline{z'}$ et $\mathrm{var}(z) = \mathrm{cov}(z, z)$. Montrer que $\mathrm{var}(z) \geq 0$ et $\mathrm{var}(z) = 0$ si et seulement si $z \in \mathrm{Vect}(e_0)$ (ie $z_1 = \ldots = z_n$).
   (d) Montrer que $F(a, b) = \frac{1}{n}\|y - ax - be_0\|_2^2$. On suppose que $x \notin \mathrm{Vect}(e_0)$. Montrer qu'alors $a_0 = \mathrm{cov}(x, y)/\mathrm{var}(x)$ et que $b_0 = \overline{y} - (\mathrm{cov}(x, y)/\mathrm{var}(x))\,\overline{x}$.

6. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des points de C et $t_1, t_2, \ldots, t_k$ des réels positifs avec $\sum_{i=1}^k t_i = 1$. Monter que la *combinaison convexe* $x = \sum_{i=1}^{k} t_ix_i$ appartient à C.

7. Pour être non imposables, les valeurs x_i d'actions du type A_i doivent vérifier $3x_1 + x_2 \leq 3$. Un client voulait $x_1 = 4$ et $x_2 = 1/3$.
   Que peut-on lui proposer comme solution la "plus proche", non imposable ?