Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2009-2010

Optimisation

LICENCE L3

Feuille d'exercices n°3

1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des points de C et $t_1, t_2, \ldots, t_k$ des réels positifs avec $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$. Monter que la *combinaison convexe* $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_i x_i$ appartient à C.
2. Pour être non imposables, les valeurs x_i d'actions du type A_i doivent vérifier $3x_1 + x_2 \leq 3$. Un client voulait $x_1 = 4$ et $x_2 = 1/3$.
   Que peut-on lui proposer comme solution la "plus proche", non imposable ?
3. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $q(x) = x_1^2 + 2px_1x_2 + x_2^2$, $p \in \mathbb{R}$, et $J(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, et l'on considère l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, q(x) = 1\}$.
   On se propose de déterminer $\min\limits_{x \in S} J(x)$ et $\max\limits_{x \in S} J(x)$.
   (a) Déterminer p de façon à ce que $q(x)$ soit une forme quadratique définie positive non dégénérée. Pour la suite, on suppose que q est définie strictement positive, déterminer le produit scalaire $[.|.]$ associé.
   (b) Exprimer J grâce à $[.|.]$.
   (c) Grâce à ce qui précède minimiser/maximiser J sur S.
4. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2$.
   (a) Montrer que q est une forme quadratique, écrire la forme bilinéaire et la matrice Q associées. Est-ce que q est positive ? négative ? non dégénérée ?
   (b) Déterminer les valeurs propres de Q et trouver une base de vecteurs propres orthonormée pour le produit scalaire euclidien.
   (c) Soit w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettant Q pour matrice dans la base canonique. Vérifier que $q(x) = \langle x, wx \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.
   (d) Montrer que q n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^3$.
   (e) Déterminer les extrema de q sur la sphère $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; \|x\|^2 = 1\}$.
5. Pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$, on pose $q(x) = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6$
   et $J(x) = q(x) - < \alpha, x >$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^6$.
   (a) Montrer que q est une forme quadratique, écrire la forme bilinéaire et la matrice Q associées. Est-ce que q est positive ? négative ? non dégénérée ?
   (b) Montrer que J n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^6$.
6. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 \; ; \quad [x, y] = x_1y_1 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2 \; ; \quad q_1(x) = [x, x]$$

et $\quad b(x, y) = x_1y_1 + 5(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2 \; ; \quad q_2(x) = b(x, x).$

(a) Étudier $(x, y) \to [x, y]$ et $(x, y) \to b(x, y)$, est-ce que ce sont des produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$? Donner les matrices associées dans la b.o.n. canonique de $\mathbb{R}^2$.

(b) Déterminer l'endomorphisme $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice W dans la b.o.n. canonique de $\mathbb{R}^2$ vérifie, pour tout x et $y \in \mathbb{R}^2$: $b(x, y) = [x, Wy]$.

(c) Résoudre les problèmes d'optimisation suivants : $\inf_{x \in S} q_2(x)$ et $\sup_{x \in S} q_2(x)$, où $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_1(x) = 1\}$.

(d) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\ ,\ x_2)$.
Déterminer la matrice associée à l'adjoint de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:
(i) dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, < ., . >)$; *(ii)* dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, [.\ ,\ .])$.

7. Soit a, b des réels strictement positifs et $\mathcal{E}$ l'ellipse définie par $\mathcal{E} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\}$.
On cherche le carré de $\mathbb{R}^2$ d'aire maximale que l'on peut tracer à l'intérieur de $\mathcal{E}$.
On pose $q(x_1, y) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$ et $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; q(x_1, x_2) \leq 1\}$.

   (a) Montrer que E est convexe. En déduire que $\mathcal{C} = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \subset E$ si et seulement si $(c_1, c_2), (c_1, d_2), (d_1, c_2)$ et (d_1, d_2) sont dans E.

   (b) Vérifier que si $\mathcal{C} = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \subset E$ alors $\widetilde{\mathcal{C}} = [-e_1, e_1] \times [-e_2, e_2] \subset E$ avec $e_1 = \max(|c_1|, |d_1|)$ et $e_2 = \max(|c_2|, |f_2|)$.

   (c) En déduire que le problème consiste à trouver $\max_{q(x_1,x_2)=1} 4x_1x_2$.

   (d) Vérifier que q est une forme quadratique définie positive. On note $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire associé.

   (e) Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ w dont la matrice W dans la base canonique vérifie $b(x, y) = (x, wy)$, avec $b(x, x) = 4x_1x_2$.

   (f) Conclure.