

Probabilités 5

LICENCE L3

Feuille d'exercices n°1

Exercice 1 *Loi exponentielle.* On suppose que le temps d'attente à un guichet est donné par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X . Vérifier que F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$ et déterminer F^{-1} .
2. Quelle est la loi de $F(X)$? Même question pour $F^{-1}(U)$ si U suit une loi uniforme sur $]0, 1[$.
3. Calculer le temps d'attente médian m vérifiant $\mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(X \geq m)$.
4. Calculer l'espérance et la variance de X .
5. *Absence de mémoire de la loi exponentielle.* Montrer que pour tout $t, s > 0$

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = k e^{-\frac{|x-\lambda|}{\mu}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$.

1. Trouver k pour que f soit la densité d'une loi de probabilité d'une variable X .
Donner la fonction de répartition de X .
2. On pose $Y = \frac{X - \lambda}{\mu}$. Donner la loi de Y appelée première loi de Laplace normalisée.
Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$; en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3 Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a(x - 2)\mathbf{1}_{]-1, 2]}(x)$.

1. Pour quelle valeur de a , f est-elle la densité d'une loi de probabilité d'une variable X ?
2. Soit Y la variable aléatoire donnée par : $Y = |X|$. Déterminer la loi de Y .

Exercice 4 On considère un cercle de centre O et de rayon $r > 0$. On choisit un point sur sa circonférence et on trace une corde au hasard. Soit X la variable aléatoire égale à la longueur de cette corde.

1. Déterminer la loi de la variable X .
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X > r\sqrt{3}) = \frac{1}{3}$.

Exercice 5 *Loi normale.* Soit X une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Quelle est la loi de la variable $aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$?
2. Calculer par récurrence $\mathbb{E}(X^n)$ pour $n \geq 1$.
3. On pose $Y = e^{X+1}$. Déterminer une densité de Y et l'espérance de Y .

4. On pose $Z = X^2 + 2X$. Déterminer la loi de Z .

Exercice 6 Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a 2^{-x} \mathbf{1}_{x>0} + a 2^x \mathbf{1}_{x \leq 0}$.

1. Pour quelle valeur de a , f est-elle la densité d'une loi de probabilité d'une variable X ?
2. Donner la fonction de répartition de X .
3. Soit Y la variable aléatoire donnée par : $Y = 2^X$. Donner la fonction de répartition de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$ si elle existe.

Exercice 7 *Transformation de la loi de Cauchy.* Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Déterminer les lois de $\frac{1}{X}$, $\frac{1+X}{1-X}$, X^2 et $\frac{1-X^2}{1+X^2}$.

Exercice 8 Soit $f(x) = a x^2 e^{-\frac{x^2}{3}} \mathbf{1}_{x>0}$.

1. Déterminer a pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X .
2. Donner la fonction de répartition F_X de X et déterminer $\mathbb{P}(X > 1)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 9 *Loi log-normale.* On dit qu'une variable aléatoire positive X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si $Y = \ln(X)$ suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Déterminer la loi de $\frac{Y-m}{\sigma}$.
2. Déterminer une densité de X . Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
3. Soit $Z = aX + b$ où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quels couples (a, b) la variable aléatoire Z suit aussi une loi log-normale.
4. Soit $T = X^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de T .