

## Probabilités 5

### LICENCE L3

#### Feuille d'exercices n°2

**Exercice 1** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $]0, a[$  ( $a > 0$ ). On pose  $U = \inf(X, Y)$ ,  $V = \sup(X, Y)$ ,  $Z = V - U$  et  $T = \frac{U}{V}$ .

1. Déterminer la loi de  $(U, V)$ .
2. Les variables  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de  $Z$  et celle de  $T$ .

**Exercice 2** Les durées de vie  $S$  et  $T$  de deux machines suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs  $\alpha$  et  $\beta$  et sont indépendantes. On note  $U = \min(T, S)$ ,  $V = \max(T, S)$  et  $W = |T - S|$ .

1. Montrer que  $W = V - U$  et déterminer la loi du couple  $(U, W)$ .
2. Déterminer la loi de  $U$ .
3. Les variables  $U$  et  $W$  sont-elles indépendantes ?
4. Quelle est la loi de  $(U, V)$  ? Les variables  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 3** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)e^{-x-y} \mathbf{1}_{0 \leq x, 0 \leq y}$$

1. Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les densités des lois de  $X$  et  $Y$ .
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de  $X + Y$ .

**Exercice 4** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{0 < y \leq x \leq 1}.$$

1. Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les densités des lois de  $X$  et  $Y$ .
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de  $X + Y$ .

**Exercice 5** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\max(|x|, |y|) \leq 1}$$

1. Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les densités des lois de  $X$  et  $Y$ .
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. On pose  $Z = \max(X, Y)$ . Calculer la fonction de répartition de la loi de  $Z$ . En déduire que  $Z$  est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité.
5. À l'aide de la méthode de la fonction muette, retrouver le résultat précédent.

**Exercice 6** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq 1}$$

1. Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les densités des lois de  $X$  et  $Y$ .
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. On pose  $Z = X^2 + Y^2$ . Calculer la fonction de répartition de la loi de  $Z$ . En déduire que  $Z$  est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité.
5. À l'aide de la méthode de la fonction muette, retrouver le résultat précédent. Indication : penser au changement de variables en pôlaires.

**Exercice 7** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x \leq y\}$  et soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = e^{-y} \mathbf{1}_D(x, y).$$

1. Vérifier que  $f$  est la densité d'un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires réelles.
2. Quelles sont les lois de  $X$  et de  $Y$  ?  $X$  et  $Y - X$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 8** Soit  $(X, Y)$  un couple admettant pour densité

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \mathbf{1}_{x \geq 1} \mathbf{1}_{y \geq 1}.$$

1. On définit les variables aléatoires  $U = XY$  et  $V = \frac{X}{Y}$ .  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?
2. Calculer  $\mathbb{E}(1/V\sqrt{U})$ .

**Exercice 9** *Loi de Pareto*. On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Pareto de paramètres  $(\alpha, \theta)$  avec  $\alpha > 0$  et  $\theta > 0$  si elle admet pour densité la fonction

$$f(x) = \frac{K(\alpha, \theta)}{x^{\alpha+1}} \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x).$$

1. Déterminer la constante de normalisation  $K(\alpha, \theta)$ .
2. Calculer les moments de  $X$  lorsqu'ils sont finis. Donner sa variance lorsqu'elle existe.
3. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi de Pareto de paramètres  $(\alpha, 1)$  avec  $\alpha > 0$ . On pose  $(Z, W) = \left( \ln(X), 1 + \frac{\ln(Y)}{\ln(X)} \right)$ .
  - (a) Déterminer la loi de  $(Z, W)$ . Les variables  $Z$  et  $W$  sont-elles indépendantes ?
  - (b) Déterminer les lois de  $Z$  et  $W$ .
4. Si  $(X_1, \dots, X_n)$  sont  $n$  variables aléatoires indépendantes de même loi de Pareto de paramètres  $(\alpha, \theta)$ , trouver la loi de  $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

**Exercice 10** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes, de lois de Pareto de paramètres respectifs  $(\alpha, \theta)$  et  $(\alpha, \eta)$ , avec  $\alpha, \theta, \eta > 0$ . Déterminer la loi de  $(XY, \frac{X}{Y})$ . Les variables aléatoires  $XY$  et  $\frac{X}{Y}$  sont elles indépendantes ?