Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2009-2010

Probabilités et Statistiques

LICENCE L3

Feuille d'exercices n°2 : Conditionnement, indépendance

Exercice 1 On considère deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 1/3$, $\mathbb{P}(B) = 1/2$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A/B)$.

Exercice 2 On considère un sac contenant deux boules rouges et quatre boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement une boule, sans remise, jusqu'à obtenir une boule rouge et on note son rang d'apparition. Déterminer sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ les différentes probabilités pour ce rang.

Exercice 3 Une ligne de communication transporte des messages binaires composés de 0 et de 1. À cause du bruit sur cette ligne, un 0 sera reçu 1 avec probabilité 0.03, et un 1 sera reçu 0 avec probabilité 0.06. On suppose que la probabilité d'émission d'un 0 est 0.4.

1. Déterminer les probabilités qu'un 1 soit reçu et qu'un 0 soit reçu.
2. Déterminer les probabilités qu'un 1 soit émis sachant qu'on a reçu un 1.
3. Déterminer la probabilité d'erreur de transmission sur cette ligne.

Exercice 4 Deux usines fabriquent les mêmes pièces. La première en produit 70% de bonnes et la deuxième 90%. Les deux usines fabriquent la même quantité de pièces.

1. Quel est le pourcentage de bonnes pièces sur le marché, supposé alimenté par les 2 usines ?
2. Même question lorsque la première usine produit 2,5 fois plus que la deuxième.

Exercice 5 On étudie la mise en place d'un test diagnostique T qui doit révéler une maladie M et on définit les évènements suivants :
T : le test est positif, M : la maladie est présente. On appelle Se la sensibilité du test donnée par $\mathbb{P}(T/M)$ et Sp la spécificité du test $\mathbb{P}(\overline{T}/\overline{M})$. Le test est idéal quand $Sp = Se = 1$.

1. Dans quels cas le test apportera-t-il une juste conclusion ? Montrer que la probabilité de cette juste conclusion est égale à : $(Se - Sp)\mathbb{P}(M) + Sp$.
2. Le test apporte une information intéressante si $\mathbb{P}(M/T) > \mathbb{P}(M)$. Montrer qu'alors $Se + Sp > 1$.
3. Application numérique : $Se = 0,94$, $Sp = 0,93$. Calculer la probabilité de prédire la présence de la maladie quand le test est positif, dans les deux cas suivants : $\mathbb{P}(M) = 0,02$ et $\mathbb{P}(M) = 0,2$. Conclure sur l'influence de $\mathbb{P}(M)$ sur ces résultats.

Exercice 6 On cherche un parapluie dans un immeuble à sept niveaux (rez-de-chaussée et six étages). Il se trouve dans l'immeuble avec une probabilité $p \in [0, 1]$. Sachant qu'il est dans l'immeuble, tous les niveaux sont possibles (c'est-à-dire RDC, Etage 1,...,Etage 6) sont équiprobables. On a exploré en vain jusqu'au cinquième étage. Quelle est la probabilité pour que le parapluie se trouve au dernier étage ?

Exercice 7 On considère deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 1/5$, $\mathbb{P}(B) = 1/4$. On donne $\mathbb{P}(A \cup B) = 7/20$. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 8 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Montrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.
2. Montrer que si A, B et C sont mutuellement indépendants, A est indépendant de $B \cap C$ et de $B \cup C$.

Exercice 9 Une compagnie de messagerie téléphonique assure que son réseau en fibre optique est si fiable que lorsque l'on compose correctement le numéro, on a 19 chances sur 20 d'obtenir la tonalité chez le correspondant désiré.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir pour la première fois la tonalité chez le correspondant désiré au bout de au plus 3 essais, si à chaque fois on compose le bon numéro ?
2. Toutefois on estime que on a 1 chance sur 10 que l'utilisateur se trompe dans la numérotation pour le premier appel, 1 chance sur 100 pour le second appel et 1 chance sur 1000 pour le dernier appel. Quelle est la probabilité d'obtenir pour la première fois la tonalité chez le correspondant désiré au bout de au plus 3 essais, compte tenu de la fiabilité du réseau ?

Exercice 10 On tire successivement et avec remise n boules d'une urne contenant 4 boules blanches, 3 boules noires, 2 boules rouges et une boule verte.

1. Calculer la probabilité de l'événement "on ne tire pas de boule blanche".
2. Calculer la probabilité de "on ne tire pas de boule blanche ou on ne tire pas de boule rouge".
3. Calculer la probabilité de l'événement "on tire au moins une boule blanche et une boule noire".

Exercice 11 Le gène qui détermine la couleur bleue des yeux est récessif. Pour avoir les yeux bleus, il faut donc avoir le génotype bb. Les génotypes mm et bm donnent des yeux marrons. On suppose que les parents transmettent un de leurs gènes (une des lettres) à leurs enfants, le choix du gène s'opérant au hasard. La soeur et la femme d'Adrien ont les yeux bleus, mais ses parents ont les yeux marrons.

1. Quelle est la probabilité pour qu'Adrien ait les yeux bleus ?
2. Quelle est la probabilité que le premier enfant d'Adrien ait les yeux bleus sachant qu'Adrien a les yeux marrons ?
3. Quelle est la probabilité pour que le deuxième enfant d'Adrien ait les yeux bleus sachant que le premier a les yeux marrons ?