

## Probabilités et Statistiques

### LICENCE L3

#### Feuille d'exercices n°3 : Variables statistiques et variables aléatoires discrètes

**Exercice 1** On cherche à évaluer la répartition géographique des habitants de la région parisienne. Le dernier recensement donne les résultats suivants.

Dépt	Paris	Seine Saint Denis	Val de Marne	Hauts de Seine	Seine et Marne	Essonne	Yvelines	Val d'Oise
Nb d'hab.	2 125 246	1 126 280	1 086 521	1 816 048	1 227 562	1 514 589	1 231 763	887 230

1. Quelle est la population étudiée ? Quelle est la variable ? Quelle est sa nature ?
2. Quelles sont les modalités prises en compte ?
3. On décide de regrouper ces données en trois classes géographiques : la ville de Paris, les départements de la *première couronne* comprenant la Seine Saint Denis, le Val de Marne et les Hauts de Seine, puis ceux de la *seconde couronne* comprenant la Seine et Marne, l'Essonne, les Yvelines et le Val d'Oise. Déterminer les effectifs de chacune de ces classes ainsi que leurs fréquences.
4. Représenter ces données sous forme d'un histogramme.

**Exercice 2** Dans un pays à encore très faible couverture vaccinale, l'âge à l'attaque de la rougeole a été observée sur 1000 cas : il y a eu 0 cas avant 3 mois, 10 cas de 3 mois à 6 mois, 70 cas de 6 mois à 1 an, 120 cas de 1 an à 1 an 1/2, 150 cas de 1 an 1/2 à 2 ans, 450 cas de 2 à 4 ans, 150 cas de 4 à 6 ans, 40 cas de 6 à 8 ans et 10 cas de 8 à 10 ans.

1. Construire le diagramme en batons et l'historgramme de l'âge à l'attaque.
2. Quel est le pourcentage d'enfants dont l'âge à l'attaque est inférieur à 1 an.
3. Construire la fonction de répartition de la distribution précédente. Evaluer la médiane et les quartiles.

**Exercice 3** Une crème dermatologique est testée sur un échantillon de 150 femmes également répartie en 3 groupes. On s'intéresse à l'éventuelle réaction allergique à la crème en fonction du type de peau.

Type de peau	mate	normale	claire
Nombre d'allergies	3	7	13

1. Quelle est la proportion des femmes de cet échantillon ayant développé une allergie ?
2. Calculer cette proportion en fonction du type de peau.
3. Donner une représentation en camembert des réactions allergisantes en fonction du type de peau.

**Exercice 4** Une enquête statistique auprès de 100 familles a conduit à la répartition suivante selon le nombre d'enfants :

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_i$	13	32	21	12	10	7	2	1	2

1. Construire le diagramme en batons de cette série.
2. Calculer la moyenne et l'écart-type.
3. Evaluer la médiane et les quartiles.

**Exercice 5** On lance deux fois un dé à 6 faces non truqué. On note  $X$  le résultat du premier lancer et  $Y$  le résultat du second.

1. Quelle est la loi de  $X$  et de  $Y$ . Tracer la fonction de répartition de  $X$ .
2. On pose  $Z = \max(X, Y)$ . Pour  $k \in \{1, \dots, 6\}$ , calculer  $P(Z \leq k)$ .
3. En déduire la loi de  $Z$ .

**Exercice 6** On lance une fois un dé non truqué.

1. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obtient 2, 3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit  $G$  la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de  $G$ ? Que vaut le gain moyen?
2. On suppose maintenant qu'on gagne 27 euros si on obtient 1, rien sinon. Préférez vous jouer au jeu du 1) ou à celui-ci? Pourquoi?

**Exercice 7** Afin de vérifier la conformité d'un lot de comprimés, on prélève un échantillon de comprimés de taille  $n$  avec remise. Soit  $p$  la probabilité d'avoir un comprimé non conforme. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre total de comprimé non conforme dans un échantillon de  $n$  comprimés. On note, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_i$  l'évènement "le  $i$ ème comprimé est non conforme"

1. Pour chaque  $A_i$ , déterminer une variable aléatoire qui vaut 1 si  $A_i$  est réalisé. Quelle est sa loi?
2. Ecrire  $X$  en fonction des variables aléatoires précédentes. En déduire sa loi, son espérance et sa variance. Tracer la fonction de répartition de  $X$  pour  $n = 3$  et  $p = 0.1$ .
3. On qualifie le lot de défectueux si on prélève au moins 1 comprimé non conforme. Quel est la probabilité que le lot soit défectueux?

**Exercice 8** Une compagnie de transports possède  $n = 15$  cars, tous en état de marche en début de journée. La probabilité qu'un car tombe en panne ce jour est  $p = 0.1$ .

1. Soit  $X$  le nombre de cars tombant en panne ce jour. Quelle est la loi de  $X$ ?
2. Un car tombé en panne sera réparé dans la journée si un réparateur est libre, la réparation prenant le reste de la journée. Sachant que la compagnie emploie 2 réparateurs, quelle est la probabilité pour que tous les cars soient en état de marche le lendemain matin?

**Exercice 9** Une usine fabrique des écrous. La probabilité qu'un écrou soit défectueux est égale à 0.015. Quelle est la probabilité qu'une boîte de 100 écrous ne contienne aucun écrou défectueux?

**Exercice 10** Un trousseau de 10 clefs comporte une seule clef ouvrant un appartement. Un ivrogne veut ouvrir la porte de cet appartement. Chaque fois qu'il tire une clef et qu'elle ne convient pas, il la remet dans le trousseau. Soit  $X$  le nombre de tirages à effectuer avant d'ouvrir.

1. Calculer la loi de  $X$  ainsi que son espérance et sa variance.
2. Quel est le nombre minimal de tentatives que doit faire cet homme pour être sûr d'ouvrir la porte avec une probabilité supérieure à  $1/2$ ?

**Exercice 11** On soumet des cellules à un long traitement. On suppose qu'une cellule traitée a, chaque jour, une probabilité  $p$  d'être lésée. On suppose qu'elle est tuée dès le premier jour où elle est lésée. Donner la loi de probabilité de sa durée de survie et calculer son âge moyen à la mort.

**Exercice 12** Le nombre annuel de pannes d'une machine suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 3$ . Quelle est la probabilité pour que cette machine ait au moins 2 pannes dans l'année? Quel est le nombre moyen annuel de pannes? Variance?