Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2008-2009

Processus du second ordre

Master 1ère année

Feuille d'exercices n°2

Exercice 1 A rédiger. Soit A une variable aléatoire positive de $L^2(\Omega)$ et φ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, indépendante de A. On considère le processus X défini par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X_t = A\cos(t + \varphi).$$

1. Montrer que X est un processus faiblement stationnaire, périodique p.s. et déterminer sa période.
2. Montrer que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus faiblement stationnaire tel que $\mathrm{Cov}(X_t, X'_t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. On suppose que A suit une loi de Rayleigh de densité $f(x) = xe^{-x^2/2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.
   (a) Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$ tel que $X_t = \varepsilon_1 \cos(t) - \varepsilon_2 \sin(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que X est un processus fortement stationnaire.
4. (a) Démontrer que si f est une fonction périodique de période $T > 0$, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\int_h^{h+T} f(u)du = \int_0^T f(u)du$.
   (b) On suppose que $A = 1$ p.s. montrer que la var X_{t+h} a même loi que X_t, pour tout $t, h \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que X est un processus fortement stationnaire.
5. Montrer que si A admet une densité, le processus X est un processus fortement stationnaire.

Exercice 2 Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus du second ordre faiblement stationnaire centré, de fonction de covariance c. Montrer que le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ construit à partir de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus du second ordre faiblement stationnaire dont on déterminera la moyenne et la fonction de covariance :

1. $Y_t = X_0$, $t \in \mathbb{R}$.
2. $Y_t = X_{at+b}$, $t \in \mathbb{R}$, où a, b sont deux entiers fixés ;
3. $Y_t = aX_t + bX_{t-1} + c$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixés ;

Exercice 3 Soient $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ des processus du second ordre faiblement stationnaires non corrélés entre eux, c'est-à-dire tels que $\mathrm{Cov}(X_s, Y_t) = 0$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$. Montrer que le processus $(X + Y) = (X_t + Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est du second ordre faiblement stationnaire.

Exercice 4 Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus du second ordre. Il est dit faiblement (respectivement fortement) réversible si, pour tous $m < n$, les vecteurs aléatoires $(X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ et $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_m)$ ont même moyenne et même matrice de covariance (respectivement même loi).

1. Montrer que si X est faiblement stationnaire, alors il est faiblement réversible.
2. Montrer que si X est un processus stationnaire gaussien, alors il est fortement réversible.

Exercice 5 Soit $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus du second ordre faiblement stationnaire et centré. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite déterministe, on pose $X_k = (a + bk)s_k + Y_k$ et $Z_k = X_k - X_{k-12} - (X_{k-12} - X_{k-24})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite périodique de période 12 (qui représente la variation du processus suivant les saisons), $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus du second ordre stationnaire. Exprimer sa fonction de covariance en fonction de celle de Y.

Exercice 6 Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de var iid de $L^2(\Omega)$ telle que $\mathbb{E}(\varepsilon_1) = m$ et $\text{Var}(\varepsilon_1) = \sigma^2$. On pose $X_k = \varepsilon_k\varepsilon_{k-1}$ et $S_k = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k$, pour $k \leq 1$ et $X = (X_k)_{k\geq 1}$.

1. Montrer que X est fortement stationnaire et déterminer sa moyenne et sa fonction de covariance.
2. On pose $S_0 = 0$ p.s. Montrer que $(S_k)_{k\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires. Déterminer sa moyenne et sa fonction de covariance.

Exercice 7 Soit le processus $X_n = \mu + X_{n-1} + \varepsilon_n$ pour $n \geq 1$ où $X_0 = 0$ p.s. et $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de var iid de $L^2(\Omega)$ telle que $\mathbb{E}(\varepsilon_1) = m$ et $\text{Var}(\varepsilon_1) = \sigma^2$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires. Déterminer sa moyenne et sa fonction de covariance.
2. Montrer que les processus Y et Z définis par $Y_n = X_{n+1} - X_n$ et $Z_n = X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n$, pour $n \in \mathbb{N}$ sont fortement stationnaires. Déterminer leurs moyennes et fonctions de covariance. Quelle relation existe-t-il entre Y et Z ?

Exercice 8 Soit $(N_t^1)_{t\geq 0}$ et $(N_t^2)_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités λ_1 et λ_2.

1. On pose $N_t = N_t^1 + N_t^2$ pour $t \geq 0$. Montrer que $(N_t)_{t\geq 0}$ est encore un processus de Poisson dont on déterminera l'intensité.
2. On pose $N_t^\alpha = N_{\alpha t}^1$ pour $t \geq 0$. Montrer que $(N_t^\alpha)_{t\geq 0}$ est encore un processus de Poisson dont on déterminera l'intensité.

Exercice 9 Paradoxe de l'autobus. On suppose que le nombre de bus arrivant à un arrêt avant l'instant t est donné par N_t avec $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Un passager arrive à l'instant $t > 0$. On note X_t et Y_t les var représentant respectivement le temps d'attente du passager avant l'arrivée du prochain bus à l'arrêt, et le temps écoulé depuis le passage du dernier bus avant l'arrivée du passager.

1. Calculer la probabilité que le passager rate le n-ième bus et doive attendre le $(n+1)$-ième bus pendant au moins un temps $s \geq 0$. En déduire $\mathbb{P}(X_t \geq s)$ la probabilité que le passager doive attendre au moins un temps $s \geq 0$.
2. Si Z est une var positive $\mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq s)ds$. En déduire $\mathbb{E}(X_t)$ le temps d'attente moyen.
3. Déterminer $\mathbb{E}(Y_t)$ le temps écoulé moyen. Quel est pourtant le temps de passage moyen entre deux bus ?

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $< ., . >$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $||.||$ la norme euclidienne associée. On considère n mouvements Browniens réels standards indépendants $(B_t^{(1)})_{t\in\mathbb{R}_+}, \ldots, (B_t^{(n)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ et on pose pour $t \in \mathbb{R}_+$, $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^n)$ (on dit alors que $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien réel n-dimensionnel). Montrer que $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $||x|| = 1$, le processus stochastique réel $(< B_t, x >)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien réel standard.

Exercice 11 Montrer que si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien réel standard, les processus stochastiques suivants sont aussi des mouvements Browniens réels standards :

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$;
2. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ où c est une constante positive fixée ;
3. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par $X_0 = 0$ p.s. et $X_t = tB_{1/t}$ si $t > 0$.