Jeux combinatoires de Conway

Bruno Bouzy

21 décembre 2005

Introduction

Ce document présente le chapitre « jeux combinatoires de Conway » au sein du cours de programmation des jeux de réflexion. Le lecteur peut se reporter [Conway 76] pour un aperçu mathématique, à [Conway & al. 82] pour une présentation plus récréative, à [Berlekamp 91] ou à [Mueller & Gasser 96] pour voir les applications de cette théorie à la programmation du jeu de Go. Ce chapitre fournit un formalisme représentant les jeux, qui sera utilisé dans la suite du cours. La structure du chapitre est une suite de définitions entrecoupées par des exemples pris sur le jeu d'amazones et d'autres jeux issus de[Conway & al. 82].

Jeu

Un *jeu* J est joué par deux joueurs : *Gauche* et *Droite.* Au jeu d'amazones, Gauche sera le joueur Bleu et Droite le joueur Rouge. Une amazone bleue sera représentée par  et une amazone rouge par . Une flèche sera représentée par . La figure 1 montre un exemple de jeu.

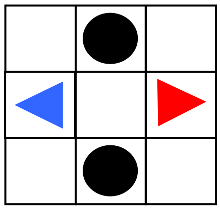
J = 

Figure 1 : Un exemple de jeu sur le jeu d'amazones.

Options

Un jeu a des *options.* Les options de Gauche étant A, B, …, C et les options de Droite étant α, β, …, γ, on note J ⌇ { A, B, …, C | α, β, …, γ }. Sur la figure 1, Gauche a 13 options, Droite aussi. Si Gauche (respectivement Droite) joue en premier dans J il choisit une option pour gauche (respectivement Droite) et J devient le jeu noté J_G (respectivement J_D). On note:

$$J ⌇ \{ J_G \mid J_D \} \qquad (1)$$

(1)est une explicitation de J en sa partie gauche J_G et en sa partie droite J_D.

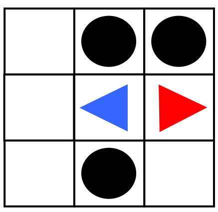
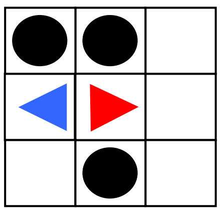
J_G =  J_D = 

Figure 2 : les parties gauche et droite du jeu de la figure 1.

Perdant

Le *perdant* d'un jeu est celui qui n'a plus d'option. Sur la figure 3, Droite a perdu.

Figure 3 : Sur l'exemple de gauche, Droite vient de jouer sa dernière option et c'est à Gauche de jouer. Sur l'exemple de droite, Gauche vient de jouer ; c'est à Droite de jouer : Droite a perdu car il n'a plus d'option.

Le jeu 0, le jeu 1, le jeu -1

Le jeu { | } s'appelle le jeu 0. Le joueur qui a le trait dans le jeu 0 perd car il n'a pas d'option. 0 est le jeu fondamental de la théorie des jeux de Conway. Ensuite, vient le jeu 1 { { 0 | } dans lequel Gauche peut jouer un coup et transformer ce jeu en 0, et dans lequel Droite ne peut pas jouer. Le lecteur vérifiera que 1 est un jeu où Gauche gagne quel que soit le trait. De manière symétrique, -1 { { | 0 }. Sur la figure 4, les positions d'amazones sont des exemples de jeu 0, 1 et –1.

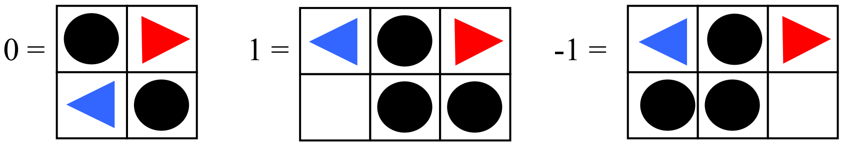


Figure 4 : des exemples de jeux 0, 1, -1 aux amazones.

Notation arborescente

On peut représenter un jeu sous forme arborescente. Un trait oblique descendant vers la gauche (respectivement droite) symbolise une option de Gauche (respectivement Droite). La figure 5 représente les jeux 0, 1, -1 sous leur forme arborescente.

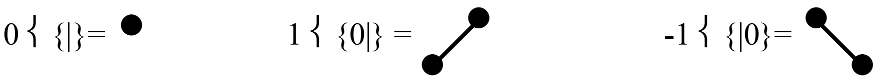


Figure 5 : les jeux 0, 1 et –1 sous forme arborescente.

D’autres jeux élémentaires

Avec les jeux 0, 1 et –1, on peut définir d’autres jeux comme l’indique la figure 6.

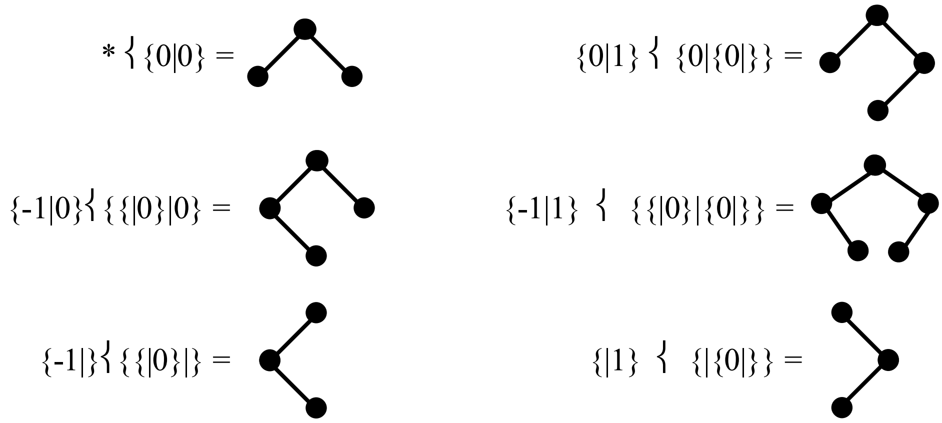


Figure 6 : les jeux *, {0|1}, {-1|0}, {-1|1}, {-1|} et {|1} sous forme arborescente.

Le jeu * est une victoire pour celui qui a le trait : si Gauche joue en premier, le jeu devient 0 et Droite ne peut pas jouer ; si Droite joue en premier, le jeu devient 0 et gauche perd.

Le jeu {0|1} est une victoire pour Gauche, que Gauche ou Droite joue en premier : si Gauche joue en premier, le jeu devient 0 et Droite perd ; si Droite joue en premier, le jeu devient 1 dans lequel gauche joue et transforme en le jeu 0 dans lequel Droite n’a pas de coup, donc perd. On montre de manière symétrique que {-1|0} est une victoire pour Droite, que Gauche ou Droite commence. Notation : {0|1} se note ½ et {-1|0} se note -½.

La figure 7 montre des positions d’amazones correspondant aux jeux *, ½, -½, et {-1|1}.

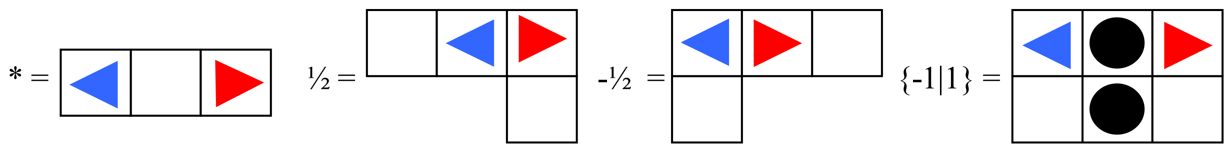


Figure 7 : des exemples de jeux *, ½, -½, et {-1|1} aux amazones.

Première simplification : le jeu 0 au sens large

La théorie des jeux de Conway se place dans le contexte où les deux joueurs *jouent parfaitement*. Ainsi le jeu {-1|1} de la figure 6 n’est pas intéressant pour aucun des deux joueurs, même si les deux joueurs ont une option : si Gauche commence, Droite joue et Gauche sans option perd ; si Droite commence, Gauche joue et Droite perd. Pareillement, les jeux {-1|} et {|1} sont des défaites pour le joueur qui a le trait. Ainsi le jeu 0 et les jeux {-1|1}, {-1|} et {|1} produisent le même effet sur les joueurs parfaits : ils ne veulent pas y jouer. On écrit :

$$\{-1|1\} \Leftrightarrow \{-1|\} \Leftrightarrow \{|1\} \Leftrightarrow 0 \qquad (2)$$

La figure 8 montre des exemples de positions d’amazones équivalentes au jeu 0.

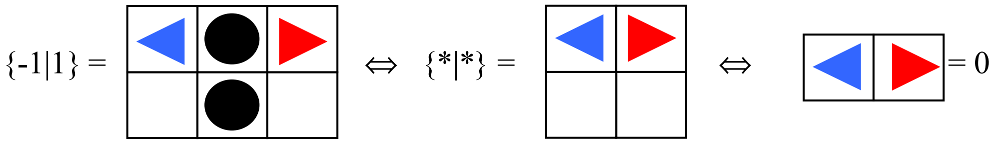


Figure 8 : trois jeux équivalents ou égaux au jeu 0.

Nombres

Conway définit les *nombres entiers positifs* de manière récurrente :

$$2 ⎨ \{1|\} \qquad \text{et} \qquad n+1 ⎨ \{n|\} \qquad (3)$$

Et symétriquement, il définit les nombres entiers négatifs :

$$-2 ⎨ \{ | -1 \} \qquad \text{et} \qquad -n-1 ⎨ \{|-n\} \qquad (4)$$

La figure 9 montre des exemples de jeux entiers.

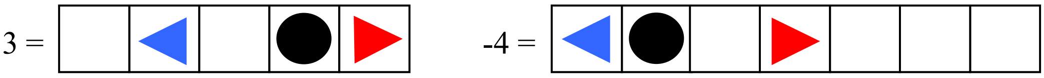


Figure 9 : deux exemples de jeux entiers : le jeu 3 et le jeu -4.

Comme les joueurs sont supposés parfaits, on a la simplification suivante :

$$a \text{ et } b \text{ tels que } a < 0 < b \qquad \{a|b\} \Leftrightarrow 0 \qquad (5)$$

Conway définit certains *nombres* non entiers avec la formule :

$$p \text{ et } q \text{ tels que } p \geq 0 \text{ et } p \geq 0 : \qquad (p+1)/2^{q+1} ⎨ \{ p/2^q \mid (p+1)/2^q \} \qquad (6)$$

Pour p=q=0, on retrouve la définition de ½ donnée par la figure 7.

Somme de jeux

L'idée de faire correspondre un nombre à un jeu n'est pas gratuite car le but de la théorie des jeux de Conway est de modéliser la *somme de jeux*. Formellement, la somme de deux jeux J et K est définie par la formule 7 :

$$J \oplus K ⎨ \{ J_G \oplus K , J \oplus K_G \mid J_D \oplus K, J \oplus K_D \} \qquad (7)$$

Quand on joue a une somme de jeux, on choisit une option parmi celles proposées par les deux jeux. Il se trouve que l'option choisie appartient soit à J soit à K, c'est pourquoi la formule (7) propose deux « options » pour chaque joueur. (7) signifie que Gauche a deux possibilités : choisir J ou K. S'il choisit J alors $J \oplus K$ devient J_G et s'il choisit K, $J \oplus K$ devient $J \oplus K_G$.

Symétriquement, Droite a deux possibilités : choisir J ou K, puis une option dans le jeu choisi. La figure 10 montre un exemple de jeu que l'on peut écrire comme somme J ⊕ K de deux jeux J et K.

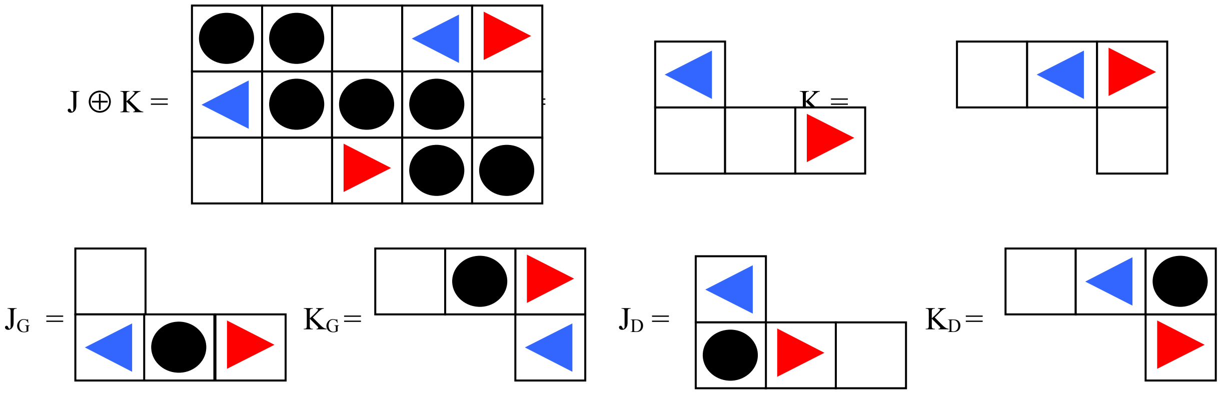


Figure 10 : exemple de position d'amazones décomposable en une somme de deux jeux.

Pour tout jeu J, par définition de la somme, les options de Gauche pour J ⊕ 0 sont la réunion des options de Gauche pour J et des options de Gauche pour 0. Or il n'y a pas d'option dans 0, donc on a toujours :

$$J \oplus 0 = J \qquad (8)$$

Jeu 0, jeu positif, jeu négatif, jeu flou

Conway classifie les jeux suivant qui gagne en fonction de qui joue en premier dans le jeu.

Un jeu J est dit *positif* si Gauche gagne quel que soit le premier à jouer dans le jeu : $J > 0$.
Un jeu J est dit *négatif* si Droite gagne quel que soit le premier à jouer dans le jeu: $J < 0$.
Un jeu J est dit *flou* si le premier à jouer dans le jeu gagne : $J \parallel 0$.
Un jeu J est dit *nul* si le premier à jouer dans le jeu perd : $J \Leftrightarrow 0$.

Le jeu K de la figure 10 est un exemple de jeu positif. Le jeu –4 de la figure 9 est un exemple de jeu négatif. Le jeu J de la figure 10 est un exemple de jeu flou. Les jeux de la figure 8 sont des exemples de jeu 0. Avec cette classification, on peut aussi définir des relations plus faibles, mais utiles:

Un jeu J est dit *positif ou nul* si Gauche gagne quand Droite joue le premier : $J \geq 0$.
Un jeu J est dit *négatif ou nul* si Droite gagne quand Gauche joue le premier: $J \leq 0$.
Un jeu J est dit *positif ou flou* si Gauche gagne quand Gauche joue le premier : $J >| 0$.
Un jeu J est dit *négatif ou flou* si Droite gagne quand Droite joue le premier : $J |< 0$.

Négatif d'un jeu

Pour un jeu J, le jeu –J est le jeu dans lequel Gauche et Droite on échangé leur options, ce qui se traduit par la formule 9 :

$$-J \;\{\; \{ -J_D \mid -J_G \} \qquad (9)$$

On vérifie facilement que le négatif du jeu 1 est le jeu –1 et plus généralement que pour tout nombre n, son négatif est –n. La figure 11 montre un exemple de jeu avec son jeu négatif.

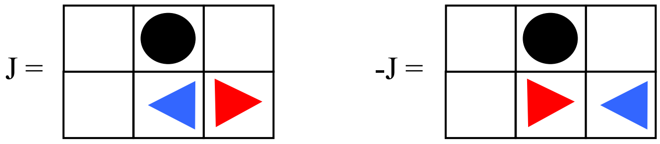


Figure 11 : Un exemple de jeu et son négatif.

Egalité et inégalités de deux jeux

Montrer que deux jeux J et K sont équivalents ou égaux se fait soit en prouvant que les arbres des deux jeux sont égaux, ou bien en montrant que J ⊕ (-K) ⇔ 0. Dans ce cas on écrira :

$$J \Leftrightarrow K \qquad (10)$$

Montrer qu’un jeu J est inférieur à un jeu K se fait en montrant que J ⊕ (-K) est un jeu négatif ou que (-J) ⊕ K est positif. Dans ce cas on écrira :

$$J < K \qquad (11a)$$

De manière analogue, deux jeux, J et K, peuvent entretenir les relations suivantes:

$$J \parallel K \qquad J \leq K \qquad J \,|\!< K \qquad (11b)$$

Faire correspondre un nombre à certains jeux n’est pas anodin. La bonne propriété des jeux nombres et de la somme ludique ⊕ est de respecter la somme numérique + pour deux nombres numériques. Pour deux jeux correspondant à des nombres m et n on a :

$$m \oplus n \Leftrightarrow m + n \qquad (12)$$

Deuxième simplification : la domination d’une option par une autre

Si J ⇔ { A, B, C, … | α, β, γ, … } et si A≥B, on dit que A *domine* B, et on peut simplifier J en éliminant les options dominées. On écrit J ⇔ { A, C, … | α, β, γ, … }.

La figure 12 montre des options de Gauche dans le jeu de la figure 1, qui sont dominées par l’option de gauche de la figure 2.

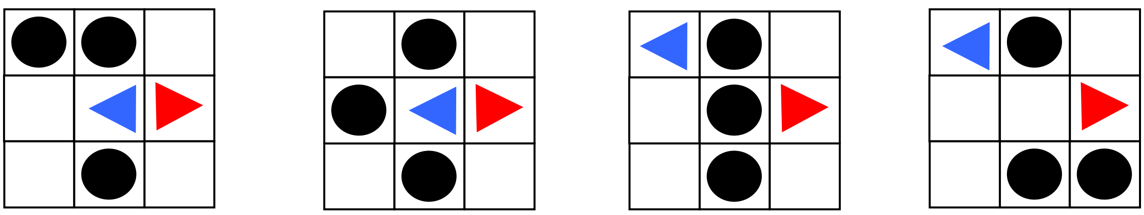


Figure 12 : quatre exemples d'options dominées par l'option de gauche de la figure 2.

Exercice facile : montrer que si n est un entier positif, $n \oplus 1 \Leftrightarrow n + 1$

Exercice moins facile : montrer que $½ \oplus ½ \Leftrightarrow 1$

Exercice autre : En prouvant que le 1er qui joue dans {0|6}-1 perd, montrer que {0|6} ⇔ 1.

Indépendance des jeux

Il est important de préciser que la théorie des jeux sommables s'applique à des jeux *indépendants* seulement. Deux jeux sont indépendants si le fait de jouer dans l'un des deux jeux ne change pas l'autre jeu. Par exemple, jouer dans le jeu J de la figure 10 ne change pas le jeu K et inversement ; les jeux J et K de la figure 10 sont indépendants. On peut donc considérer leur somme.

Jeux infinitésimaux, les jeux ↑ et ↓

La théorie des jeux combinatoires définit des nombres *infinitésimaux*. En plus de *zéro* noté 0 et de *étoile* noté *, les deux infinitésimaux les plus communs sont : *haut* noté ↑, et *bas* noté ↓. Ils sont définis par la figure 13:

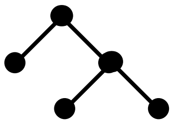
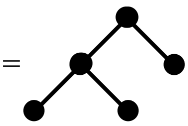
↑ ≡ { 0 | * } =  ↓ ≡ { * | 0 } = 

Figure 13 : les jeux haut (↑) et bas (↓) sous forme arborescente.

↑ est positif et inférieur à tous les nombres positifs. ↓ est négatif et supérieur à tous les nombres négatifs. * est flou ; il est aussi un infinitésimal au sens où il est inférieur à tout nombre positif et supérieur à tout nombre négatif. La figure 14 donne deux exemples d'amazones correspondant aux jeux ↑ et ↓.

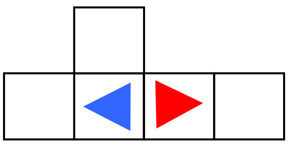
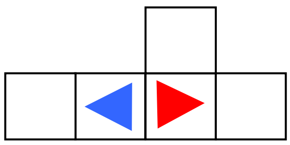
↑ =  ↓ = 

Figure 14 : les jeux haut (↑) et bas (↓) illustrés à amazones. La démonstration utilise la notion d'option réversible (voir ci-dessous).

Troisième simplification : remplacement d'option réversible

Si J est un jeu tel que :

$$J \equiv \{ A, B, \ldots \mid C, D, \ldots \} \text{ avec } C_G \geq J \text{ et } C_G \equiv \{ E, F, \ldots \mid G, H, \ldots \} \qquad (13)$$

alors on dit que C est une option *réversible*, et on peut simplifier J de la manière suivante :

$$J \ ⎨ \ \{ A, B, \ldots \mid G, H, \ldots, D, \ldots \} \qquad (14)$$

Autrement dit : si $C_G \geq J$, on peut remplacer l'option réversible C de J par les options de droite dans de C_G. (Pour la démonstration de ce théorème, cf page 63 [Conway & al. 82]).

Exercice : Montrer A = ↑ de la figure 14 : premièrement, sans utiliser la simplification d'option réversible, mais seulement la domination d'option, montrer que $A_G = 0$ (facile). Deuxièmement, sans utiliser la simplification d'option réversible, essayer de montrer que $A_D = *$ (impossible). Pourquoi cela ne marche-t-il pas ? Montrer que c'est parce que $\{+1|-1\} \leq *$ est faux. Troisièmement, montrer que $1 \geq A$. En utilisant la simplification d'option réversible, montrer que l'on peut supprimer $\{+1|-1\}$ des options de Droite de A et en déduire que A = ↑.

Explicitation, identité, équivalence, égalité, somme : une notation

Arrivé à ce point, récapitulons les notations utilisées pour la définition d'un jeu. Nous avons défini un jeu par son *explicitation* en partie gauche et partie droite avec le symbole ⎨ dans la formule (1). Lorsque deux jeux ont des arbres *identiques*, nous avons utilisé le symbole =. Lorsque deux jeux donnent le *même résultat* nous avons utilisé le symbole ⇔, par exemple dans la formule (2) et dans la formule (10). Quand cela ne sera pas ambigu, et dans le but d'alléger la notation, nous remplacerons dans la suite les symboles ⎨et ⇔ par le symbole =. Pour les mêmes raisons, lorsque cela ne sera ambigu, nous noterons de la même manière l'opérateur somme ludique ⊕ et l'opérateur somme usuelle avec le symbole +.

Intérêt et motivation de la théorie des jeux sommables

Considérons le jeu des batraciens (cf [Conway & al. 82] pages 14-15). Il se joue sur un damier avec 4 colonnes et N lignes. Les grenouilles sont jaunes et représentées par des ◀ . Elles se déplacent vers la gauche, d'une case ou en sautant par dessus un crapaud. Les crapauds sont verts et représentés par des ▶. Ils se déplacent vers la droite. La figure 15 montre un exemple.

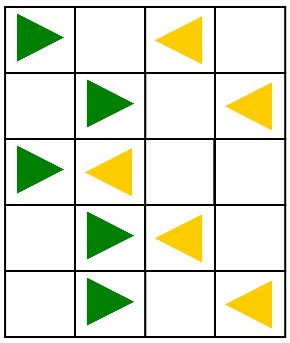


Figure 15 : la position qui nous intéresse.

Si l'on essaie de résoudre ce jeu, c'est-à-dire savoir qui gagne en fonction de qui commence, par un minimax, le facteur de branchement est environ 5 et la longueur de la partie est au moins 15. La taille de l'arbre de ce jeu est environ 5^{15} soit environ 10^{10}.

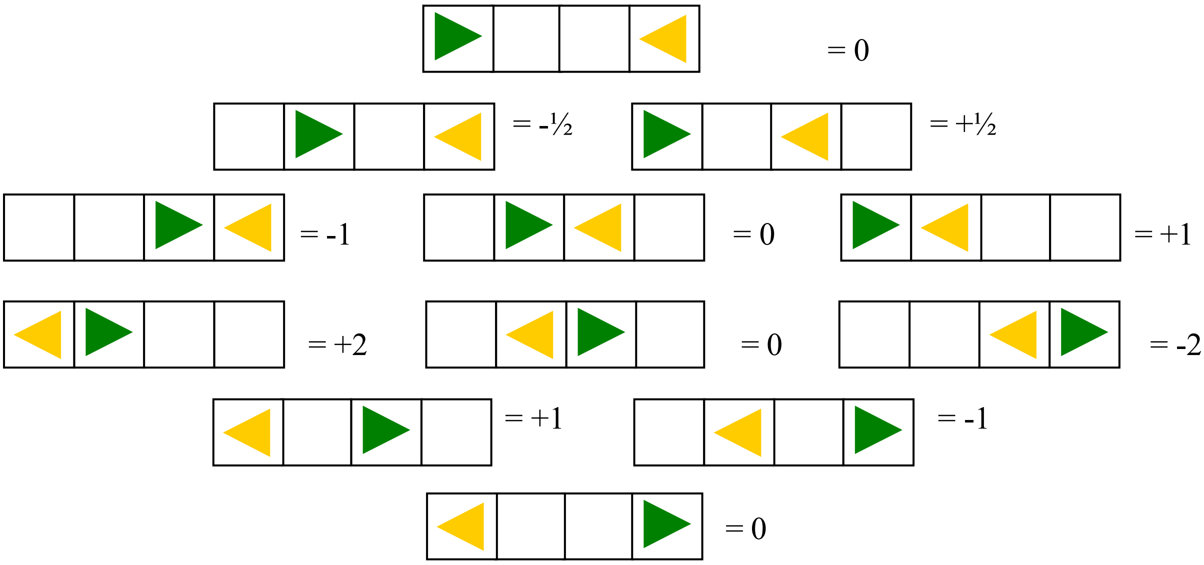


Figure 16 : le graphe complet du jeu desbatraciens.

En observant que les batraciens ne changent pas de ligne, on est certain que le jeu est la somme de 5 jeux indépendants: les 5 lignes de la figure 15. On peut donc étudier la valeur ludique de chaque ligne et voir. Pour cela on peut construire le graphe complet du jeu des batraciens sur une ligne comme le montre la figure 16. On peut affecter une valeur à chaque position du jeu. Ainsi, on voit que le jeu de la figure 15 et une somme de jeux. Cette somme vaut ½ + (-½) + 1 + 0 + (-½) = ½. Le jeu de la figure 15 est une victoire pour Gauche, c'est-à-dire pour les crapauds, même si Droite, c'est-à-dire les grenouilles, commence.

Finalement, on observe dans le cas du jeu des batraciens que construire le graphe de la figure 16 et valoriser les nœuds du graphe avec les valeurs de Conway constitue une approche qualitative beaucoup moins coûteuse qu'une recherche arborescente dans un arbre de taille 10^{10} environ.

Somme de jeux infinitésimaux, les jeux $\uparrow$, $\downarrow$*, $\Uparrow$ et $\Downarrow$*

On peut tenter de construire la table d'addition des jeux infinitésimaux, 0, *, $\uparrow$ et $\downarrow$. On a : $0 + 0 = 0$, $0 + * = *$, $0 + \uparrow = \uparrow$, $0 + \downarrow = \downarrow$, $* + * = 0$ (pour cela, prouver que celui qui commence à $* + *$ perd), $\uparrow + \downarrow = 0$ (c'est trivial : $\downarrow$ est le négatif de $\uparrow$). Par ailleurs, $\uparrow + *$ n'est pas égal * ni à $\uparrow$. Par définition, on pose :

$$\uparrow* = \uparrow + * \qquad\qquad \downarrow* = \downarrow + * \qquad (15)$$

On peut simplifier l'écriture de $\uparrow$*. On écrit d'abord $\uparrow* = \{0+*, \uparrow+0 \mid *+*, \uparrow+0 \}$ par définition de +. Ensuite, on écrit $\uparrow* = \{*, \uparrow \mid 0, \uparrow \}$ par suppression des 0 et car $* + * = 0$. Ensuite, $\uparrow* = \{*, \uparrow \mid 0 \}$ car $0 \leq \uparrow$. Enfin, on montre que $\uparrow* = \{ 0, * \mid 0 \}$. Sauriez vous le faire ? (Il faut utiliser la simplification d'option réversible sur Gauche). On montre de manière similaire que $\downarrow* = \{ 0 \mid 0, * \}$. Ce qui donne en résumé de ce paragraphe, la formule suivante :

$$\uparrow* = \{ 0, * \mid 0 \} \qquad\qquad \downarrow* = \{ 0 \mid 0, * \} \qquad (16)$$

Enfin, $\uparrow+\uparrow$ n'est pas égal à $\uparrow$. Par définition, on note :

$$\uparrow+\uparrow = \Uparrow \qquad\qquad \downarrow+\downarrow = \Downarrow \qquad (17)$$

$\Uparrow$ s'appelle double haut et $\Downarrow$ double bas. On les note parfois $2\uparrow$ et $2\downarrow$. Par récurrence on définit aussi $n\uparrow$ et $n\downarrow$. Bien remarquer que $n\uparrow$ (respectivement $n\downarrow$) est inférieur (respectivement supérieur) à tout nombre positif (respectivement négatif).

Comparaison de jeux infinitésimaux

Arrivé à ce point, on peut se demander comment les jeux infinitésimaux sont-ils reliés par <. On sait que $\downarrow < 0 < \uparrow$. Sauriez-vous montrer que $* < 0$, $* < \uparrow$ et $\uparrow < *$ sont faux ? Sauriez-vous montrer que $\uparrow < \Uparrow$? que $* < \Uparrow$? On peut dessiner les jeux infinitésimaux sur l'axe des nombres. Ils sont tous situés en zéro, donc il faut prendre une loupe et voir comment ils sont placés sur la figure 17.

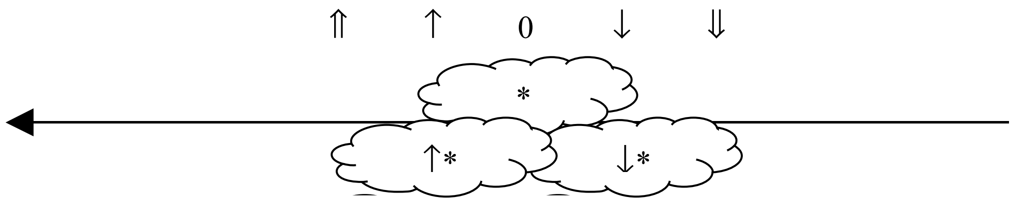


Figure 17 : la position des jeux infinitésimaux au voisinage du jeu 0. Les jeux $*$, $\uparrow*$ et $\downarrow*$ sont flous. Ils sont représentés par un « nuage » de « rayon » légèrement supérieur à la valeur de $\uparrow$, ce qui reflète le fait que $\uparrow$ n'est pas supérieur à $*$.

Exercice : montrer que $\uparrow* \parallel 0$ est vrai, que $\uparrow* \geq 0$ est faux, que $\uparrow* \geq *$ et $\Uparrow* > 0$ sont vrais.

Exercice : montrer que $\{\uparrow|0\} = \{0|\downarrow\} = *$.

Exercice : montrer que $\{\uparrow|\uparrow\} = \{0|\uparrow\} = \Uparrow*$.

Exercice Clobber: démontrer les égalités de la figure 18.

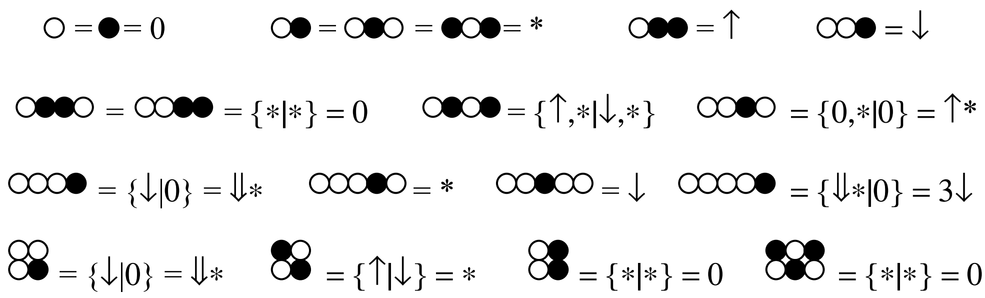


Figure 18 : exemples de positions de Clobber, simples, correspondant aux jeux infinitésimaux 0, $*, \uparrow, \downarrow, \uparrow*, \downarrow*, \Downarrow*, 3\downarrow$.

Le jeu x = x+**

On peut additionner un nombre et *, le résultat se note x*. Il est facile de montrer que :

$$x* = x + * = \{x|x\} \qquad (18)$$

Domineering

Sur un damier, Gauche pose des dominos verticalement, et Droite horizontalement. La figure 19 donne les valeurs de quelques positions simples.

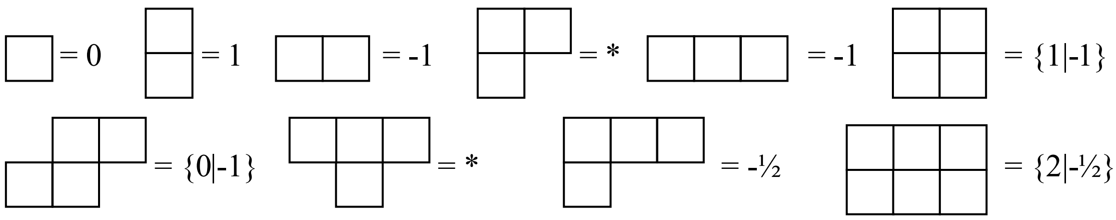


Figure 19 : les jeux les plus simples au Domineering.

Les valeurs {1|-1}, {0|-1} et {2|-½}s'appellent des *switches*.

Switches

Un *switch* est de la forme :

$$\{ a \mid b \} \qquad \text{a et b nombres tels que } a > b \qquad (19)$$

Dans un switch, les deux joueurs veulent jouer. En effet, si Gauche joue en premier il obtient un résultat (a) supérieur à celui obtenu s'il ne joue pas (b). Symétriquement, si Droite joue en premier il obtient un résultat (b) inférieur à celui obtenu s'il ne joue pas (a). La figure 20 montre la position d'un switch sur l'axe des nombres : elle est répartie sur un intervalle.

Si z est un nombre et a et b sont des nombres tels que a>b :

- Si $z > a$ alors $z > \{a|b\}$
- Si $z < b$ alors $z < \{a|b\}$
- Si $b \le z \le a$ alors $z \,||\, \{a|b\}$

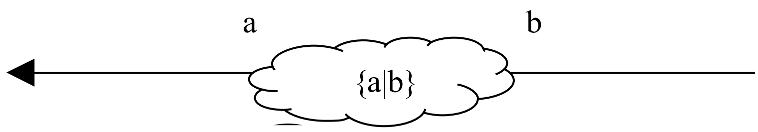


Figure 20 : la position d'un switch sur l'axe des nombre est répartie sur un intervalle.

Si x, y et z sont des nombres tels que x≥y, alors un joueur préfère jouer dans {x|y} que dans z, ce que l'on écrit :

$$\{x|y\} + z = \{ x+z \mid y+z \} \qquad \text{avec } x \geq y \qquad (20)$$

Le jeu J_G de la figure 2 vaut {1|3}=2 (ce n'est pas un switch). Le jeu J_D de la figure 2 vaut {-3|-1}=-2 (ce n'est pas un switch non plus). Le jeu de la figure 1 correspond au switch {2|-2}. Le jeu J de la figure 10 est le switch {1|-1}. Le jeu J+K de la figure 10 correspond au switch { 1½ | -½ }.

Si x et y sont des nombres tels que x≥y, alors un joueur préfère jouer dans {x|y} que dans *, ce que l'on écrit :

$$\{x|y\} + * = \{ x* \mid y* \} \qquad \text{avec } x \geq y \qquad (21)$$

Température d'un switch, stratégie de la température

Pour un switch {x|y}, la valeur (x-y)/2 s'appelle la *température* du switch. Pour un jeu somme de plusieurs switches et de nombres, la *stratégie de la température* consiste à jouer dans le jeu dont la température est la plus grande. Pour un jeu somme de jeux et de nombres, le *théorème d'évitement des nombres* dit de ne pas jouer dans un nombre, sauf s'il n'y a rien d'autre à faire.

Incentive

Si $J = \{J_G|J_D\}$, alors le jeu $J_G - J$ s'appelle *l'incentive gauche* de J, et le jeu $J - J_D$ s'appelle *l'incentive droit* de J.

Refroidissement un jeu, température, pic

Un autre concept important de cette théorie est le *refroidissement*. On peut *refroidir* un jeu J d'une valeur t et définir le *jeu refroidi* J_t par la formule suivante :

$$G_t = \{ Gl_t - t \mid Gr_t + t \} \quad \text{si } t < \tau \qquad (22)$$
$$G_t = x \quad \text{si } t > \tau$$
où τ est la plus petite valeur telle que G_τ soit un nombre.

Intuitivement, refroidir un jeu J d'une valeur t revient à dire que l'on doit payer une taxe t pour jouer dans J_t. Par exemple, si J = { 3 | -2} alors J_1 = { 2 | -1}. Si Gauche joue dans J_1, il gagne J_G (3) moins la taxe (1), c'est-à-dire 2. Et si Droite joue dans J_1, il gagne J_D (-2) plus la taxe (1), c'est-à-dire -1. On a de même J_2 = {1 | 0} et $J_{2.5}$ = 0.5. Enfin, pour t > 2.5, on a G_t = 0.5. Dans cet exemple, τ = 2.5.

τ est appelée la *température* du jeu. Remarquer que cette définition est générale à tous les jeux contrairement à celle de la température d'un switch. La température est la plus petite valeur pour laquelle le jeu refroidi est un nombre. La température de J est 2.5. Le nombre x qui correspond au jeu refroidi de τ est appelé le *pic*. Le pic de J est 0.5.

Thermographes

Le refroidissement d'un jeu peut être représenté graphiquement avec un *thermographe*. L'axe vertical est la variation de température (ou taxe) et l'axe horizontal est la valeur du jeu. La figure 21 montre le thermographe du jeu {3|-2}. Si la taxe est supérieure à 2.5, le jeu est un nombre donc Gauche et Droite ne veulent pas jouer dans ce jeu.

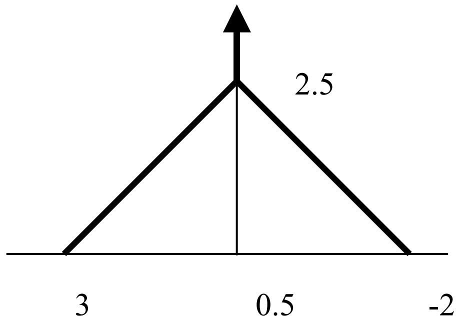


Figure 21

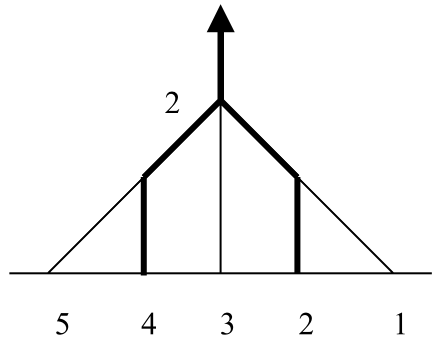


Figure 22

Pour le jeu H = {{6|4}|{2|0}} cela donne le thermographe de la figure 22. Si gauche joue en premier, Droite peut transformer le jeu en 4 ; si gauche joue deux fois de suite, le jeu devient 6 ; si Droite joue en premier, gauche peut transformer le jeu en 2, et si droite joue deux fois de suite, le jeu devient 0. Une autre notation pour H est {6|4||2|0}.

Tant que la taxe est inférieure à 1, Gauche et Droite jouent dans le jeu {6|4} ou dans le jeu {2|0} pour faire un profit. Donc, les deux joueurs paient la taxe une fois et le jeu H s'arrête en 4 si Gauche joue en premier, et en 2 si Droite joue en premier. Quand la taxe t devient plus grande que 1, on a $\{6|4\}_t = 5$ et $\{2|0\}_t = 1$. Donc, pour une taxe t supérieure à 1, $H_t = \{5|1\}_t$. Ensuite, tant que la taxe est inférieure à 2, les deux joueurs jouent dans $H_t=\{5-t|1+t\}$. Pour une taxe supérieure à 2, H_t vaut 3 et personne ne veut jouer dans H_t. Sur cet exemple, le pic de H est 3 et sa température est 2. Pour plus de détails sur les thermographes voir [Conway & al. 82]. Pour un switch {a|b}, on vérifie bien sûr que la température est (a-b)/2 et que le pic vaut (a+b)/2.

Stratégies

La stratégie la plus simple à suivre est celle de la température: jouer dans le jeu dont la température est la plus élevée. Des stratégies plus complexes existent [Conway & al. 82].

Exercice : Quelle est la température de {3|2||1|0} ? et de {-1|-2} ? En déduire que {3|2||1|0} + {-1|-2} = { {2|1||1|0} ||| {0|-1||-1|-2} }. Montrer que {3|2||1|0} - {2|1} || 0. Peut-on écrire {3|2||1|0} = {2|1} ?

2 articles très intéressants

• (Spight 2002) : une partie de go est jouée avec le choix de jouer un coup normal ou de prendre un ticket rapportant des points. On peut faire cela avec n'importe quel jeu J.

• (Berlekamp 2002) : une partie somme de 4 jeux est commentée en détail : Go + Domineering + Echecs + Checkers.

Références

John Conway, *On Number And Games*, Academic Press, 1976.

Elwyn Berlekamp, *The 4G4G4G4G4 Problems and Solutions*, More games of No Chance, MSRI Publications, Volume 42, pages 231-241, 2002.

Elwyn Berlekamp, John Conway, Richard Guy, *Winning ways*, Academic Press, 1985.

Elwin Berlekamp, *Introductory overview of Mathematical Go Endgames*, Proceedings of symposia in Applied mathematics, 43, 1991.

Elwin Berlekamp, David Wolfe, *Mathematical Go Endgames, Nightmares for the Professional Go Player*, Ishi press international, San Jose, London, Tokyo, 1994.

Martin Mueller, L. Gasser, *Experiments in Computer Go Endgames*, Games of No Chance, R. J. Nowakowski (eds), Cambridge University Press, pp. 273-284, 1996.

William Spight, *Go thermography: the 4/21/98 Jiang-Rui Endgame*, More games of No Chance, MSRI Publications, Volume 42, pages 89-105, 2002.