# Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Examen (28 Mai 2001)

## Corrigé

1. On a $H_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\mathbf{E^*}[S_N \vee k|\mathcal{F}_n] \geq (1+r)^n \mathbf{E^*}[\tilde{S}_N|\mathcal{F}_n] = (1+r)^n\tilde{S}_n = S_n$ .D'autre part , $H_n \geq \frac{k}{(1+r)^{N-n}}$ , cette dernière quantité représentant la valeur actualisée du prix plancher à l'instant $n$

2. On peut écrire

$$(1+r)^{N-n}H_n = \mathbf{E^*}[S_N \vee k|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E^*}[S_n T_{n+1}\cdots T_N \vee k|\mathcal{F}_n] = u(n, S_n)$$

quand on a posé $u(n,s) = \mathbf{E^*}[sT_{n+1}\cdots T_N \vee k]$ .

On peut calculer explicitement $u$ à l'aide d'un lemme du cours : on a

$$u(n,s) = \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N-n}{j} p^j(1-p)^{N-n-j}[s(1+a)^j(1+b)^{N-n-j} \vee k]$$

d'où

$$H_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N-n}{j} p^j(1-p)^{N-n-j}[S_n(1+a)^j(1+b)^{N-n-j} \vee k]$$

3. Pour $k=0$ , la formule précédente s'écrit

$$H_n = \frac{S_n}{(1+r)^{N-n}}[p(1+a)+(1-p)(1+b)]^{N-n}$$

mais comme la quantité entre crochets est égale à $1+r$ , on obtient $H_n = S_n$ , ce qui , bien entendu , était prévisible sans calculs .

4. Appelons $\Phi = (\phi_0, \phi)$ un portefeuille autofinancé simulant $h$ . On a alors

$$H_n = u(n, S_n) = V_n(\Phi) = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_n S_n;$$

on en tire l'égalité $u(n\ ,\ T_n S_{n-1}) = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_n T_n S_{n-1}$ ; se rappelant que $T_n$ prend les 2 valeurs $1+a, 1+b$ on voit que cette dernière égalité est équivalente au système

$$\begin{cases} u(n\ ,\ (1+a)S_{n-1})1_{\{T_n=1+a\}} = [\phi_n^0(1+r)^n + (1+a)\phi_n S_{n-1}]1_{\{T_n=1+a\}} \\ u(n\ ,\ (1+b)S_{n-1})1_{\{T_n=1+b\}} = [\phi_n^0(1+r)^n + (1+b)\phi_n S_{n-1}]1_{\{T_n=1+b\}} \end{cases}$$

Après conditionnement par $\mathcal{F}_{n-1}$ sous $\mathbf{P^*}$ , ce système devient

$$\begin{cases} u(n\ ,\ (1+a)S_{n-1}) = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_n(1+a)S_{n-1} \\ u(n\ ,\ (1+b)S_{n-1}) = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_n(1+b)S_{n-1} \end{cases}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \phi_n^0 &= \frac{(1+b)u(n\ ,\ (1+a)S_{n-1}) - (1+a)u(n\ ,\ (1+b)S_{n-1})}{(b-a)(1+r)^n} \\ \phi_n &= \frac{u(n\ ,\ (1+b)S_{n-1}) - u(n\ ,\ (1+a)S_{n-1})}{(b-a)S_{n-1}} \end{aligned}$$

Si $k=0$ , $u(n,s) = s$ , ce qui conduit aux égalités $\phi_n^0 = 0$ , $\phi_n = 1$ : la stratégie de couverture de l'option $h$ (qui en l'occurence est égale à $S_N$) , consiste , comme on pouvait le prévoir , à conserver en portefeuille une action $S$ .