Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Examen (Septembre 2001)

Corrigé

1. On a $H_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\mathbf{E^*}[S_N \wedge k|\mathcal{F}_n] \leq (1+r)^n\mathbf{E^*}[\tilde{S}_N|\mathcal{F}_n] = (1+r)^n\tilde{S}_n = S_n$ .D'autre part , $H_n \leq \frac{k}{(1+r)^{N-n}}$, cette dernière quantité représentant la valeur actualisée du prix plafond à l'instant n

2. On peut écrire

$$(1+r)^{N-n}H_n = \mathbf{E^*}[S_N \wedge k|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E^*}[S_nT_{n+1}\cdots T_N \wedge k|\mathcal{F}_n] = u(n, S_n)$$

quand on a posé $u(n,s) = \mathbf{E^*}[sT_{n+1}\cdots T_N \wedge k]$.

On peut calculer explicitement u à l'aide d'un lemme du cours : on a

$$u(n,s) = \sum_{j=0}^{N-n}\binom{N-n}{j}p^j(1-p)^{N-n-j}[s(1+a)^j(1+b)^{N-n-j} \wedge k]$$

d'où

$$H_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\sum_{j=0}^{N-n}\binom{N-n}{j}p^j(1-p)^{N-n-j}[S_n(1+a)^j(1+b)^{N-n-j} \wedge k]$$

3. Posons $S_0 = s_0$ et montrons qu'une C.N.S. pour que $H_n = S_n \ \ \forall n$ est

$$k \geq s_0(1+b)^N \tag{1}$$

Comme $S_n = s_0T_1T_2\cdots T_N$, on a

$$S_N \leq s_0(1+b)^N \tag{2}$$

D'autre part , l'indépendance des v.a. T_i sous $\mathbf{P^*}$ entraine

$$\mathbf{P^*}[S_N = s_0(1+b)^N] = \mathbf{P^*}[T_1 = 1+b; T_2 = 1+b; \cdots ; T_N = 1+b] = (1-p)^N > 0. \tag{3}$$

Supposons alors (1) vérifiée ; on a $S_N \leq s_0(1+b)^N \leq k$; on peut alors écrire

$$H_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\mathbf{E^*}[S_N \wedge k|\mathcal{F}_n] = (1+r)^n\mathbf{E^*}[\tilde{S}_N|\mathcal{F}_n] = (1+r)^n\tilde{S}_n = S_n$$

Réciproquement , supposons $H_n = S_n \ \ \forall n$; cela entraine en particulier $H_N = S_N$ et donc $S_N \leq k$. Comme , d'après (3) , $\{\omega|S_N(\omega) = s_0(1+b)^N\} \neq \phi$, on a nécessairement $s_0(1+b)^N \leq k$.

4. (a) Appelons $\Phi = (\phi_0, \phi)$ un portefeuille autofinancé simulant h . On a alors

$$H_n = u(n, S_n) = V_n(\Phi) = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_nS_n;$$

on en tire l'égalité $\quad u(n\ ,\ T_nS_{n-1}) = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_nT_nS_{n-1}$; se rappelant que T_n prend les 2 valeurs $1+a, 1+b$ on voit que cette dernière égalité est équivalente au système

$$\begin{cases} u(n\ ,\ (1+a)S_{n-1})1_{\{T_n=1+a\}} = [\phi_n^0(1+r)^n + (1+a)\phi_nS_{n-1}]1_{\{T_n=1+a\}} \\ u(n\ ,\ (1+b)S_{n-1})1_{\{T_n=1+b\}} = [\phi_n^0(1+r)^n + (1+b)\phi_nS_{n-1}]1_{\{T_n=1+b\}} \end{cases}$$

Après conditionnement par $\mathcal{F}_{n-1}$ sous $\mathbf{P^*}$, ce système devient

$$\begin{cases} u(n\ ,\ (1+a)S_{n-1}) = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_n(1+a)S_{n-1} \\ u(n\ ,\ (1+b)S_{n-1}) = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_n(1+b)S_{n-1} \end{cases}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \phi_n^0 &= \frac{(1+b)u(n\ ,\ (1+a)S_{n-1}) - (1+a)u(n\ ,\ (1+b)S_{n-1})}{(b-a)(1+r)^n} \\ \phi_n &= \frac{u(n\ ,\ (1+b)S_{n-1}) - u(n\ ,\ (1+a)S_{n-1})}{(b-a)S_{n-1}} \end{aligned}$$

(b) La C.N.S. cherchée est la même qu'à la question précédente (i.e. $k \geq s_0(1+b)^N$) ; en effet :

- Si (1) est vérifiée , on sait que $S_N = H_N$; $\Phi = (0,1)$ est alors un portefeuille simulant h .
- Si $\phi^0 = 0$, on a $S_N = V_N(\Phi) = S_N \wedge k$, d'où $S_N \leq k$. nous avons vu à la question 3. (réciproque) que cela entrainait l'inégalité (1) .