

Problème

On se place dans le marché financier de Cox , Ross et Rubinstein tel qu'il est décrit dans le cours dont nous reprenons les notations . On supposera $a < r < b$ et l'on se donne un nombre réel $k \geq 0$.

Une institution financière émet l'option $h = S_N \vee k$; (cette option permet à son possesseur de profiter de la hausse du cours S tout en limitant son risque en cas de baisse puisqu'il est assuré de toucher la somme k à la date d'exercice). On notera H_n le prix de cette option à la date n .

1. Montrer les inégalités

$$H_n \geq S_n \quad , \quad H_n \geq \frac{k}{(1+r)^{N-n}} \quad \forall n \leq N$$

2. montrer qu'il existe une fonction $u : (n, s) \mapsto u(n, s)$ de $\{0, 1, 2, \dots, N\} \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} telle que

$$H_n = u(n, S_n) \quad \forall n ; \text{ calculer } u \text{ explicitement .}$$

3. Que donne la formule trouvée à la deuxième question dans le cas où $k = 0$?
4. Construire un portefeuille simulant h ; examiner là encore le cas $k = 0$.