

**Problème**

On se place dans le marché financier de Cox , Ross et Rubinstein tel qu'il est décrit dans le cours dont nous reprenons les notations . On suppose  $a < r < b$  et l'on se donne un nombre réel  $k \geq 0$  .

On considère l'option européenne  $h = S_N \wedge k$  ; . On notera  $H_n$  le prix de cette option à la date  $n$  .

1. Montrer les inégalités

$$H_n \leq S_n \quad , \quad H_n \leq \frac{k}{(1+r)^{N-n}} \quad \forall n \leq N$$

2. montrer qu'il existe une fonction  $u : (n, s) \mapsto u(n, s)$  de  $\{0, 1, 2, \dots, N\} \times \mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$H_n = u(n, S_n) \quad \forall n ; \text{ calculer } u \text{ explicitement .}$$

3. Montrer que  $H_n = S_n \quad \forall n$  si et seulement si  $k \geq S_0(1+b)^N$  .

4. (a) Construire un portefeuille  $\Phi = (\phi^0, \phi)$  simulant  $h$  .

- (b) Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier  $k$  pour que  $\phi^0 = 0$  ?