Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Devoir sur table - Mars 2002

Corrigé

1. Montrons par exemple que $\mathbf{E}[X_1|S_n] = \mathbf{E}[X_2|S_n]$; on a , si f ets une fonction numérique , et si m désigne la loi de X_1 , (et par conséquent de toute v.a. X_i) ,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_1 f(S_n)] &= \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_n} x_1 f(x_1+x_2+\cdots+x_n)m(x_1)m(x_2)\ldots m(x_n) \\ &= \sum_{x_2,x_1,\ldots,x_n} x_2 f(x_2+x_1+\cdots+x_n)m(x_2)m(x_1)\ldots m(x_n) = \mathbf{E}[X_2 f(S_n)]\end{aligned}$$

Prenons pour f l'indicateur d'un point j de $\mathbb{R}$; il vient $\mathbf{E}[X_1\,;S_n=j] = \mathbf{E}[X_2\,;S_n=j]$. Il en résulte que

$$\mathbf{E}[X_1|S_n] = \sum_j \mathbf{E}[X_1|S_n=j]1_{\{S_n=j\}} = \sum_j \mathbf{E}[X_2|S_n=j]1_{\{S_n=j\}} = \mathbf{E}[X_2|S_n]$$

2. Il résulte de la question précédente que

$$\mathbf{E}[X_1|S_n] = \frac{1}{n}\{\mathbf{E}[X_1|S_n] + \mathbf{E}[X_2|S_n] + \ldots \mathbf{E}[X_n|S_n]\} = \mathbf{E}[\frac{S_n}{n}|S_n] = \frac{S_n}{n}$$

3. On notera tout d'abord que deux algèbres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont telles que $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathcal{V}_\mathcal{F}\subset\mathcal{V}_\mathcal{G}$; il nous faut donc vérifier que toute v.a. $\mathcal{G}_{n+1}$-mesurable est $\mathcal{G}_n$-mesurable ; il suffit pour cela que les v.a. $S_{n+1}, X_{n+2},\ldots,X_N$ soient $\mathcal{G}_n$-mesurables , ce qui est clair si l'on a remarqué que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

4. Soit $A = \{S_n = s\}\cap\{X_{n+1} = i_{n+1}\}\cap\cdots\cap\{X_N = i_N\}$ un atome de $\mathcal{G}_n$; les v.a. $\mathbf{E}[X_1|\mathcal{G}_n]$ sont constantes sur A ; il s'agit de montrer que ces constantes sont égales , ce que prouve le calcul suivant où l'on a posé $B = \{X_{n+1} = i_{n+1}\}\cap\cdots\cap\{X_N = i_N\}$

$$\frac{\mathbf{E}[X_1 1_A]}{\mathbf{P}A} = \frac{\mathbf{E}[X_1;\{S_n=s\}B]}{\mathbf{P}\{S_n=s\}\mathbf{P}B} = \frac{\mathbf{E}[X_1;\{S_n=s\}]}{\mathbf{P}[S_n=s]}$$

On a donc

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} = \mathbf{E}[X_1|\mathcal{G}_{n+1}] = \mathbf{E}[X_1|\mathcal{G}_n|\mathcal{G}_{n+1}] = \mathbf{E}[\frac{S_n}{n}|\mathcal{G}_{n+1}].$$