Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Examen - 5 Juin 2002

Corrigé

1er problème

1. La suite (M_n) est une somme de variables aléatoires centrées indépendantes . Il en est de même de la suite (R_n) définie par $R_n = \sum_0^n (X_k^2 - \sigma^2)$.

2. (a) Si (M_n) possède la P.R.P. , il existe par définition une suite (U_n) prévisible telle que $\Delta R_n = U_n \Delta M_n$ ce qui s'écrit encore

$$(X_n^2 - \sigma^2) = U_n X_n. \tag{1}$$

Cela entraine en particulier $X_n(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega$, (puisque $\sigma^2 > 0$)

(b) Ecrivons (1) sous la forme $U_n = \frac{X_n^2 - \sigma^2}{X_n}$ et conditionnons les 2 membres par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$; il vient $U_n = C$, où C est une constante puisque le deuxième membre est indépendant de $\mathcal{F}_{n-1}$; remplaçant U_n par C dans (1) , on arrive à l'égalité

$$X_n^2 - CX_n - \sigma^2 = 0 \tag{2}$$

(c) Appelons $-a$ et b les racines du trinôme $x^2 - Cx - \sigma^2$; il résulte de (2) que $X_n(\omega) \in \{-a, b\} \quad \forall n \quad \forall \omega$. Comme X_n est centrée , a et b sont nécessairement > 0 .

2ième problème

1. On a $p + q = 1$ et $bp - aq = 0$. On en tire aisément $p = \frac{a}{a+b}$, $q = \frac{b}{a+b}$ d'où $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$.

2. (a) Comme Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable , il existe $f_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ telle que $Y_n = f_n(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)$ Les règles de calcul pour le conditionnement vues dans le cours conduisent alors à l'égalité

$$\mathbf{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] = p f_n(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, b) + q f_n(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, -a) \tag{3}$$

(b) Il en résulte que la condition $\mathbf{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ entraine la relation

$$f_n(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, -a) = -\frac{a}{b} f_n(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, b) \tag{4}$$

On en tire

$$Y_n = f_n(X_0, X_1, \dots, b)[1_{\{X_n = b\}} - \frac{a}{b} 1_{\{X_n = -a\}}] = \frac{1}{b} f_n(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, b) X_n$$

3. Soit (N_n) une martingale ; puisque $\mathbf{E}[\Delta N_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$, on a , d'après ce qui précède ,

$$\Delta N_n = U_n X_n = U_n \Delta M_n ,$$

quand on a posé $U_n = \frac{1}{b} f_n(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, b)$, ce qui prouve le résultat .