

Corrigé

1. (a) Posons $\beta = \frac{1}{1+r}$; on a

$$\mathbf{E}[\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \beta^{n+1}\mathbf{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \beta^{n+1}S_n\mathbf{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \beta\tilde{S}_n\mathbf{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

Il en résulte que

$$\mathbf{E}[\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n \iff \mathbf{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$$

- (b) Si le marché est viable il existe une probabilité \mathbf{P}^* sous laquelle (\tilde{S}_n) est une martingale ; on peut alors écrire

$$1 + a_1 \leq \mathbf{E}^*[T_1] = 1 + r \leq 1 + a_3$$

d'où le résultat .

- (c) Supposons d'abord $r = a_1$; posons

$$\phi_n^0 = -1 \quad ; \quad \phi_n = 1 \quad \forall n \leq N$$

$\hat{\phi} = (\phi^0, \phi)$ est une stratégie évidemment prévisible vérifiant $V_n(\hat{\phi}) = S_n - (1+r)^n$, ce qui entraîne $V_0(\hat{\phi}) = 0$ et $V_n(\hat{\phi}) \geq 0 \quad \forall n$. Plaçons nous maintenant sur l'événement (non vide, donc de probabilité > 0) $A = [T_1 = 1 + a_3]$ sur lequel on a $S_N = (1 + a_3)T_2 \dots T_N > (1 + r)^N$; il est clair que $V_N(\hat{\phi})$ est > 0 sur A , ce qui montre que $\hat{\phi}$ est une stratégie d'arbitrage. Dans le cas où $r = a_3$ c'est $(-\hat{\phi})$ qui constitue une stratégie d'arbitrage. Le comportement d'un spéculateur suivant ces 2 stratégies peut être décrit comme suit : si $r = a_1$, il emprunte 1F à l'instant 0 ce qui lui permet d'acheter l'actif risqué qu'il conserve jusqu'à la date N ; si, au contraire, $r = a_3$, il emprunte une action qu'il vend immédiatement et place l'argent ainsi récolté à la caisse d'épargne.

2. (a) Soit ω un point de Ω ; il existe $(i_1, i_2, \dots, i_N) \in \{1, 2, 3\}^N$ tel que $\omega = ((1 + a_{i_1}), (1 + a_{i_2}), \dots, (1 + a_{i_N}))$. On a alors, puisque les v.a T_i sont indépendantes,

$$\mathbf{P}_x^*(\omega) = \mathbf{P}_x^*\{[T_1 = 1 + a_{i_1}]; [T_2 = 1 + a_{i_2}]; \dots ; [T_N = 1 + a_{i_N}]\} = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_N} > 0$$

- (b) Sous \mathbf{P}_x^* , T_{n+1} est indépendante de \mathcal{F}_n ; on peut donc écrire

$$\mathbf{E}_x^*[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}_x^*[T_{n+1}] = \sum_1^3 (1 + a_i)x_i = 1 + \sum_1^3 a_i x_i.$$

Il résulte alors de la question 1. que (\tilde{S}_n) est une martingale si et seulement si $\sum_1^3 a_i x_i = r$.

3. Le système d'équations linéaires avec second membre

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{1}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = r \tag{2}$$

est de rang 2 ; l'ensemble de ses solutions $x = (x_1, x_2, x_3)$ constitue donc une droite affine D de \mathbb{R}^3 ; les intersections de cette droite avec les 3 plans formés par les axes des coordonnées sont

$$u' = \left(0, \frac{a_3 - r}{a_3 - a_2}, \frac{r - a_2}{a_3 - a_2}\right), \quad u'' = \left(\frac{a_3 - r}{a_3 - a_1}, 0, \frac{r - a_1}{a_3 - a_1}\right), \quad u''' = \left(\frac{a_2 - r}{a_2 - a_1}, \frac{r - a_1}{a_2 - a_1}, 0\right).$$

- (a) Supposons d'abord $a_1 < r \leq a_2$; en écrivant que D est l'unique droite passant par les points u'' et u''' , on obtient

$$x \in D \iff \exists s \in \mathbb{R} \quad x = u'' + s(u''' - u'') = su''' + (1 - s)u''$$

Un point x de D peut donc s'écrire sous la forme

$$\left(s \frac{a_2 - r}{a_2 - a_1} + (1 - s) \frac{a_3 - r}{a_3 - a_1}, \quad s \frac{r - a_1}{a_2 - a_1}, \quad (1 - s) \frac{r - a_1}{a_3 - a_1}\right) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Les coordonnées de ce point sont > 0 si et seulement si $s \in]0, 1[$ de sorte que $J =]u'', u''']$.

- (b) Si , maintenant , $a_2 < r < a_3$ un raisonnement analogue obtenu en remplaçant u''' par u' permet d'établir que $J =]u', u''[$.
4. D'après de 1.(b) et (c) , une condition nécessaire pour que le marché soit viable est $r \in]a_1, a_3[$; réciproquement , s'il en est ainsi ,(Cf 3.), il existe une infinité de probabilités de support Ω sous lesquelles (\tilde{S}_n) est une martingale ; un théorème du cours nous assure alors que le marché financier est viable mais incomplet .
5. (a) Les coordonnées de x et y sont solutions des équations (1) et (2)
- (b) Montrons , par exemple , que la v.a. $h = 1_{[T_1=1]}$ n'est pas simulable .Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite prévisible (ϕ_n) telles que

$$h = \phi_0 + \sum_{n=1}^N \phi_n \Delta \tilde{S}_n \quad (3)$$

Plaçons nous sous la probabilité \mathbf{P}_x^* ; (\tilde{S}_n) est une martingale ainsi que $M_n = (\phi * \tilde{S})_n$; notant que (3) s'écrit $h = M_N$, on a

$$1/4 = x_1 = \mathbf{E}_x^*[h] = \mathbf{E}_x^*[M_N] = \mathbf{E}_x^*[M_0] = \phi_0$$

Mais le même raisonnement effectué sous \mathbf{P}_y^* conduit à l'égalité $\phi_0 = 1/8$ d'où une contradiction.