

Problème

(Ω, \mathbf{P}) est un espace de probabilité fini et (X_1, X_2, \dots, X_N) une suite de N variables aléatoires réelles indépendantes équadistribuées sur Ω . On pose, pour $n \leq N$,

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

1. Montrer les égalités

$$\mathbf{E}[X_1|S_n] = \mathbf{E}[X_2|S_n] = \dots = \mathbf{E}[X_n|S_n]$$

2. En déduire que $\mathbf{E}[X_1|S_n] = \frac{S_n}{n}$

3. Notons \mathcal{G}_n l'algèbre $\mathcal{F}(S_n, X_{n+1}, \dots, X_N)$; montrer que $\forall n < N, \mathcal{G}_{n+1} \subset \mathcal{G}_n$

4. Montrer que $\mathbf{E}[X_1|\mathcal{G}_n] = \mathbf{E}[X_1|S_n]$; en déduire les égalités

$$\mathbf{E}\left[\frac{S_n}{n}|\mathcal{G}_{n+1}\right] = \frac{S_{n+1}}{n+1} \quad \forall n < N$$