Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Examen - 5 Juin 2002

Durée:3H Documents interdits

Dans les deux problèmes qui suivent , $(\Omega, \mathbf{P})$ désignera un espace de probabilité fini et $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ une suite de N variables aléatoires centrées , réelles , indépendantes , équidistribuées sur Ω . On posera

$$X_0 = 0 \ ; \ M_n = X_0 + X_1 + \ldots + X_n \ \ (0 \leq n \leq N) \ ; \ \sigma^2 = \mathbf{E}[X_1^2]$$

et l'on supposera $\sigma^2 > 0$; on posera enfin $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

1^{er} Problème

1. Montrer que (M_n) est une martingale et qu'il en est de même de la suite $(\sum_0^n (X_k^2 - \sigma^2))$.
2. On suppose que la martingale (M_n) possède la propriété prévisible
   (a) Montrer qu'il existe une suite prévisible (U_n) telle que $X_n^2 - \sigma^2 = U_n X_n \quad \forall n$
   (b) Montrer qu'il existe une constante C telle que
   $$X_n^2 - CX_n - \sigma^2 = 0$$
   (c) En déduire qu'il existe a et $b > 0$ tels que $X_n(\omega) \in \{-a, b\} \quad \forall \omega \in \Omega$

2^{ième} Problème

Réciproquement , on suppose que (X_n) satisfait à la condition) 2.(c) précédente ; on se propose de montrer que (M_n) possède alors la propriété de représentation prévisible . On posera

$$\mathbf{P}[X_1 = b] = p \quad ; \quad \mathbf{P}[X_1 = -a] = q$$

1. Montrer que $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$
2. Soit (Y_n) une v.a.r. $\mathcal{F}_n$-mesurable
   (a) Montrer qu'il existe une application $f_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ telle que
   $$\mathbf{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] = pf_n(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, b) + qf_n(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, -a)$$
   (b) En déduire que la condition $\mathbf{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ entraine l'égalité
   $$Y_n = \frac{f_n(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, b)}{b} X_n$$
3. Montrer alors que la martingale (M_n) possède la propriété de représentation prévisible .