Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Examen - 2 Septembre 2002

Durée:3H   Documents interdits

Problème

On construit un marché financier d'horizon $N \geq 2$, comportant un actif risqué $(S_n \; ; \; 0 \leq n \leq N)$, et un actif sans risque $S_n^0 = (1+r)^n$ de la façon suivante : Soient a_1, a_2, a_3 trois nombres réels tels que $-1 < a_1 < a_2 < a_3$; on pose $\Omega = \{(1+a_1), (1+a_2), (1+a_3)\}^N$, on désigne par $(T_n \; ; \; 1 \leq n \leq N)$ la suite des applications coordonnées , et par $(\mathcal{F}_n)$ la filtration naturelle qu'elle engendre (on posera par convention $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \phi\}$) . L'actif risqué sera défini par la relation de récurrence

$$S_0 = 1 \quad ; \quad S_{n+1} = T_{n+1} S_n \quad ; \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots, (N-1)\}$$

1. Soit $\mathbf{P}$ une probabilité admettant Ω comme support ;
   (a) Montrer que $(\tilde{S}_n)$ est une $\mathbf{P}$-martingale si et seulement si
   $$\mathbf{E}\{T_{n+1} | \mathcal{F}_n\} = 1 + r \qquad \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots, (N-1)\}.$$
   (b) En déduire que ce marché financier ne peut être viable que si $r \in [a_1, a_3]$
   (c) Trouver des stratégies d'arbitrage prévisibles dans les cas où $r = a_1$ et $r = a_3$.
2. Soit C le polyèdre convexe de $\mathbb{R}_+^3$ défini par les relations
   $$x \in C \iff x_i > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \;\; et \;\; x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
   Soit $x \in C$; on appellera $\mathbf{P}_x^*$ la probabilité sur Ω pour laquelle :
   - la suite (T_n) est indépendante et équidistribuée
   - la loi de T_1 est donné par les égalités $\quad \mathbf{P}_x^*\{T_1 = 1 + a_i\} = x_i \quad (i = 1, 2, 3)$
   (a) Montrer que le support de $\mathbf{P}_x^*$ est Ω
   (b) Montrer que $(\tilde{S}_n)$ est une $\mathbf{P}_x^*$-martingale si et seulement si $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = r$
3. On suppose $a_1 < r < a_3$ et l'on appelle J l'ensemble des vecteurs x de C pour lesquels $(\tilde{S}_n)$ est une $\mathbf{P}_x^*$-martingale . Montrer que J est un segment de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera les extrémités .(On distinguera les 2 cas : $a_1 < r \leq a_2$ et $a_2 < r < a_3$)
4. On revient dans ce qui suit aux notations de la première question : $\mathbf{P}$ est une probabilité quelconque de support Ω
   (a) donner une condition *nécessaire et suffisante* pour que le marché financier considéré soit viable .
   (b) On suppose cette condition remplie ; ce marché est il complet ?
5. On pose $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $r = 1 \quad ; \quad x = (1/4 \, , \, 1/2, \, 1/4) \;\; , \;\; y = (1/8 \, , 3/4 \, , 1/8)$
   (a) Montrer que $(\tilde{S}_n)$ est une martingale sous $\mathbf{P}_x^*$ et sous $\mathbf{P}_y^*$
   (b) Montrer que les indicateurs des événements $[T_1 = 1]$, $[T_1 = 2]$, $[T_1 = 3]$ constituent 3 variables aléatoires non simulables .