Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Devoir sur table - Mars 2003

Corrigé

1. Soit $(\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n)$ une énumération de Ω ; l'application de $\mathbf{V}$ dns $\mathbb{R}^n$ définie par $X \to (X(\omega_1), X(\omega_2) \ldots, X(\omega_n))$ constitue un isomorhisme d'espace vectoriel (i.e. une bijection linéaire) ; $\mathbf{V}$ est donc de dimension n . Pour étudier $\mathbf{W}$, introduisons une énumération $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ de $Z(\Omega)$; les p événements $[Z = z_i]$ constituent une partition de Ω , si bien que les variables aléatoires $Y_i = 1_{[Z=z_i]}$ $(1 \leq i \leq p)$ constituent p vecteurs indépendants de $\mathbf{W}$. De plus , tout élément $\phi(Z)$ de $\mathbf{W}$ peut s'écrire $\sum_{i=1}^{i=p} \phi(z_i) Y_i$ ce qui montre que la famille (Y_i) engendre $\mathbf{W}$, et en constitue donc une base . $\mathbf{W}$ est par conséquent de dimension p . Enfin $\mathbf{A}$, qui admet une base constituée des 2 v.a. Z et 1 , est de dimension 2 .

2. $U = \mathbf{E}[X|Z]$ sera la projection orthogonale de X sur $\mathbf{W}$ si elle vérifie les deux proriétés suivantes :
a) $U \in \mathbf{W}$ b) $\mathbf{E}[XW] = \mathbf{E}[UW] \quad \forall W \in \mathbf{W}$.
La condition a) est vérifiée par définition de l'espérance conditionnelle ; b) est démontré dans le cours en **2.2.2** .

3. Appelons Y la projection orthogonale de X sur $\mathbf{A}$; il existe 2 réels r et s tels que
$$Y = rZ + s \tag{1}$$
On doit avoir
$$\mathbf{E}[X - Y] = 0 \quad , \quad \mathbf{E}[(X - Y)Z] = 0$$
ce qui , compte tenu de (1), s'écrit encore
$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = r\mathbf{E}[Z] + s \quad , \quad \mathbf{E}[XZ] = r\mathbf{E}[Z^2] + s\mathbf{E}[Z] \tag{2}$$
De (1) et (2) on tire facilement l'égalité $Y - \mathbf{E}[X] = r(Z - \mathbf{E}[Z])$ si bien qu'il ne reste plus qu'à déterminer r , ce qui se fait aisément en éliminant s dans le système d'équations (2) .
Rappelons que la v.a. Y ainsi calculée s'appelle la régression de X en Z et la droite d'équation $y = \mathbf{E}[X] + r(z - \mathbf{E}[Z])$ la ligne de régression de X en Z .

4. Il résulte des propriétés d'une projection orthogonale que
$$\mathbf{E}[X - \mathbf{E}[X|Z]]^2 \leq \mathbf{E}[X - W]^2 \quad \forall W \in \mathbf{W}$$
On obtient le résultat demandé en prenant W égal à Y .

5. Il suffit d'invoquer le résultat suivant relatif aux projections euclidiennes : si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{W}$ sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbf{V}$ tels que $\mathbf{A} \subset \mathbf{W}$ alors $p_A \circ p_W = p_A$.

6. Supposons $Z(\Omega) = \{a, b\}$ avec $a \neq b$; soit $W = \phi(Z)$ une v.a. de $\mathbf{W}$; il existe une fonction affine α (unique) telle que $\alpha(a) = \phi(a)$ *et* $\alpha(b) = \phi(b)$; on a donc $\alpha(Z) = \phi(Z)$ si bien que $\mathbf{A} = \mathbf{W}$; la réponse à la question posée devient alors évidente .