Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Corrigé de l'examen - Juin 2003

1. Consulter le cours polycopié.

2. On a, en appliquant (1)

$$H_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\mathbf{E}^*[h(S_N^1) \mid \mathcal{F}_n] = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\mathbf{E}^*[h(S_n^1 T_{n+1}T_{n+2}\dots T_N) \mid \mathcal{F}_n]$$

Or, S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable tandis que la v.a. $T_{n+1}\dots T_N$ est indépendante de $\mathcal{F}_n$; les règles de calcul que nous avons vues pour l'espérance conditionnelle montrent que (2) est vérifiée quand on a posé

$$c(n,s) = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\mathbf{E}^*[h(sT_{n+1}\dots T_N)]. \tag{1}$$

La croissance de h entraîne alors immédiatement celle des fonctions $c(n,\ .)$

3. (a) Par définition du prix d'une option, on a, si ϕ est la stratégie simulant H,

$$V_n(\phi) = H_n = c(n, S_n^1)$$

ce qui s'écrit encore

$$(1+r)^n\phi_n^0 + \phi_n^1 S_{n-1}^1 T_n = c(n, S_{n-1}^1 T_n) \tag{2}$$

Mais puisque les v.a. T_n prennent les 2 valeurs $1+a$ et $1+b$, (4) est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{l} 1_{[T_n=1+a]}[(1+r)^n\phi_n^0 + \phi_n^1 S_{n-1}^1(1+a)] = c(n, S_{n-1}^1(1+a))1_{[T_n=1+a]} \\ 1_{[T_n=1+b]}[(1+r)^n\phi_n^0 + \phi_n^1 S_{n-1}^1(1+b)] = c(n, S_{n-1}^1(1+b))1_{[T_n=1+b]} \end{array} \right.$$

Prenons l'espérance conditionnelle des 2 membres relativement à $\mathcal{F}_{n-1}$; il vient, compte tenu du fait que (ϕ_n) est prévisible et T_n indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+r)^n\phi_n^0 + \phi_n^1 S_{n-1}^1(1+a) = c(n, S_{n-1}^1(1+a)) \\ (1+r)^n\phi_n^0 + \phi_n^1 S_{n-1}^1(1+b) = c(n, S_{n-1}(1+b)) \end{array} \right.$$

On en tire

$$\phi_n^1 = \frac{c(n,(1+b)S_{n-1}^1) - c(n,(1+a)S_{n-1}^1)}{(b-a)S_{n-1}^1} \tag{3}$$

(b) Comme les fonctions $c(n\ ,\ .)$ sont croissantes, (5) prouve que $\phi_n^1 \geq 0 \ \ \forall n$ ce qu'il fallait démontrer.

(c) On obtient le call européen de prix d'exercice K en prenant pour fonction h $\ x \to (x-K)^+$ qui est croissante. Le résultat (b) s'applique donc à ce cas.

(d) Supposons $N=1$, $S_0^1 = 1$ et posons $u(x) = (K-x)^+$; pour simuler l'option de vente $u(S_1^1)$ le portefeuille ϕ devra vérifier

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^0(1+r) + \phi_1^1(1+a) = u(1+a) \\ \phi_1^0(1+r) + \phi_1^1(1+b) = u(1+b) \end{array} \right.$$

(on notera que ϕ_1 est déterministe). On aura donc $\phi_1^1 = \frac{(K-(1+b))^+ - (K-(1+a))^+}{b-a}$; si nous supposons $K > 1+a$, $\ \phi_1^1$ est alors < 0. Cela signifie que la couverture d'un put de prix d'exercice $> 1+a$ nécessite la vente à découvert à la date 1 d'une quantité $|\phi_1^1|$ de l'actif risqué .

4. Pour calculer explicitement H_n, revenons à la formule (3) ; apppliquant le lemme (39) du cours polycopié, on peut écrire

$$\mathbf{E}^*[h(sT_{n+1}\dots T_N)] = \sum_{k=0}^{N-n} C_{N-n}^k\, p^k q^{N-n-k} h(s(1+a)^k(1+b)^{N-n-k})$$

On a donc

$$H_n = c(n, S_n^1) = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \sum_{k=0}^{N-n} C_{N-n}^k\, p^k q^{N-n-k} h(S_n^1(1+a)^k(1+b)^{N-n-k})$$

On calcule ensuite ϕ_n^1 à l'aide de la formule (5).