Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Devoir sur table - Mars 2003

Durée : 2H   Documents interdits

Problème

Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité fini tel que $\mathbf{P}(\omega) > 0 \quad \forall\omega \in \Omega$ et Z une variable aléatoire réelle . On supposera $|\Omega| = n$, $|Z(\Omega)| = p$ et l'on notera

- $\mathbf{V}$ l'espace vectoriel euclidien des variables aléatoires réelles sur Ω muni du produit scalaire $(X, Y) \to \mathbf{E}[XY]$.
- $\mathbf{W}$ le sous espace de $\mathbf{V}$ formé par les fonctions déterministes de Z
- $\mathbf{A}$ le sous espace de $\mathbf{W}$ formé par les fonctions affines de Z

1. Quelles sont les dimensions des espaces vectoriels $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ et $\mathbf{A}$?
2. Soit $X \in \mathbf{V}$; montrer que $\mathbf{E}[X|Z]$ est la projection de X sur $\mathbf{W}$
3. Montrer que la projection eucidienne Y de X sur $\mathbf{A}$ est donnée par l'égalité
$$Y = \mathbf{E}[X] + r(Z - \mathbf{E}[Z])$$
quand on a posé $r = \frac{cov(X,Z)}{var(Z)}$
4. Montrer sans calculs l'inégalité $\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X|Z])^2] \leq \mathbf{E}[(X - Y)^2]$.
5. Montrer que Y est aussi la projection euclidienne de $\mathbf{E}[X|Z]$ sur $\mathbf{A}$
6. Montrer que $\mathbf{E}[X|Z] = Y$ si $|Z(\Omega)| = 2$