

## Problème

1. (Question de cours)

- (a) Rappeler la définition du prix  $H_n$  à la date  $n$  d'une option européenne  $H$  dans un marché financier viable et complet.
- (b) Montrer l'égalité

$$H_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbf{E}^*[H \mid \mathcal{F}_n] \quad (1)$$

Dans toute la suite,  $(\Omega, \mathbf{P}, (S_n, 0 \leq n \leq N))$  désignera un marché financier de Cox, Ross et Rubinstein. Les notations générales seront celles du cours ; on posera en particulier  $S_n = ((1+r)^n, S_n^1)$  où  $r$  est le taux d'intérêt du marché et  $(S_n^1)$  le cours de l'actif risqué. On supposera  $-1 < a < r < b$ . On se donne une fonction *croissante*  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  à la quelle on associe l'option européenne  $H = h(S_N^1)$ .

2. Dédurre de (1) qu'il existe une fonction  $c : (n, s) \rightarrow c(n, s)$  de  $\{0, 1, 2, \dots, N\} \times \mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$H_n = c(n, S_n^1) \quad \forall n \quad (2)$$

Montrer de plus que, quelque soit  $n$ , la fonction  $s \rightarrow c(n, s)$  est croissante.

3. Soit  $(\phi_n) = (\phi_n^0, \phi_n^1)$  un portefeuille autofinancé simulant  $H$ .

- (a) Exprimer  $\phi^1$  à l'aide de  $c$ .
- (b) Montrer que, au cours de cette stratégie, on n'effectue à aucun moment un emprunt d'actif risqué (ou, ce qui est équivalent, une vente à découvert de cet actif).
- (c) La remarque précédente vaut-elle pour la stratégie de couverture d'une option d'achat (call européen) de prix d'exercice  $K$  sur l'actif risqué ?
- (d) Montrer par un exemple que la couverture d'une option de vente (put européen) sur l'actif risqué nécessite en général une vente à découvert de cet actif. (On pourra se limiter au cas où  $N = 1$ ).

4. On pose

$$p = \frac{b-r}{b-a} \quad , \quad q = \frac{r-a}{b-a} .$$

Calculer explicitement  $(H_n)$  et  $(\phi_n^1)$  en fonction de  $h$ ,  $p$  et  $q$ .