Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Examen - Septembre 2003

Durée : 3H Documents interdits

Question de cours

1. Rappeler la définition du prix H_n à la date n d'une option européenne H dans un marché financier viable et complet.
2. Montrer l'égalité
$$H_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbf{E}^*[H \mid \mathcal{F}_n]$$
3. En déduire la relation de parité call-put dans un marché viable et complet

Problème[1]

Soit $\Big(\Omega, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_n), (S_n) \;\; ; \;\; 0 \leq n \leq N\Big)$ un marché financier tel que $\mathbf{P}(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$.

Soit $p \in \{1, 2, \ldots, N\}$; on suppose qu'il existe un vecteur aléatoire $\eta = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^d)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_{p-1}$-mesurable tel que
$$U_p \geq 0 \qquad ; \qquad \mathbf{P}[U_p > 0] > 0 \tag{1}$$
quand on a posé $U_p = [\eta, \Delta \tilde{S}_p]$.

On définit la suite de vecteurs aléatoires $(\psi_n \;\; ; \;\; 0 \leq n \leq N)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par
$$\psi_n = \begin{cases} \eta & \text{si } \; n = p \\ 0 & \text{si } \; n \neq p \end{cases}$$

1. Montrer que (ψ_n) est une suite prévisible.
2. Montrer qu'il existe un portefeuille $(\phi)_n = (\phi^0, \phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^d)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$, tel que
$$\tilde{V}_n(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; n < p \\ U_p & \text{si } \; n \geq p \end{cases}$$
3. En déduire que le marché n'est pas viable.
4. Réciproquement, on suppose le marché financier non viable. Montrer qu'il existe un entier p et un vecteur aléatoire $\eta \quad \mathcal{F}_{p-1}$-mesurable vérifiant (1).

   Indications : Si (ϕ_n) est une stratégie d'arbitrage, on pourra poser
$$p = \inf\{n \mid \mathbf{P}[V_n(\phi) > 0] > 0\} \;\; \text{et} \;\; \eta = (\phi_p^1, \phi_p^2, \ldots, \phi_p^d)$$

[1] Le corrigé de ce problème figurera dans l'édition 2004 du polycopié