

Université René Descartes
Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)
Examen - 6 Mai 2004
Corrigé

Les marchés considérés dans ce problème étant viables et complets, on appellera \mathbf{P}^* l'unique probabilité sur Ω sous laquelle les cours actualisés des actifs sont des martingales. Rappelons que, dans ces conditions,

$$\Pi_n(h) = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbf{E}^*[h \mid \mathcal{F}_n]$$

1. On a donc

$$\begin{aligned} \Pi_n(f) + \Pi_n(g) &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbf{E}^*[S_N^1 \vee k + S_N^1 \wedge k \mid \mathcal{F}_n] = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbf{E}^*[S_N^1 + k \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \tilde{k}(1+r)^n + (1+r)^n \mathbf{E}^*[\tilde{S}_N^1 \mid \mathcal{F}_n] = \tilde{k}(1+r)^n + (1+r)^n \tilde{S}_n^1 = \tilde{k}(1+r)^n + S_n^1 \end{aligned}$$

2. Appelons ψ le portefeuille ainsi constitué ; on a

$$V_n(\psi) = \Pi_n(g) + \Pi_n(f) - S_n^1 = \tilde{k}(1+r)^n.$$

L'investisseur doit disposer de la somme $V_0(\psi) = \tilde{k}$ à la date 0 ; d'autre part ce portefeuille a le même comportement que celui qui serait constitué de la somme \tilde{k} placé dans l'actif sans risque.

3. On a

$$\begin{aligned} V_n(\phi) &= \Pi_n(g) - \Pi_n(f) = \frac{(1+r)^n}{(1+r)^N} \mathbf{E}^*[|S_N^1 - k| \mid \mathcal{F}_n] \geq (1+r)^n \mathbf{E}^*[\tilde{S}_N^1 - \tilde{k} \mid \mathcal{F}_n] \\ &\geq (1+r)^n |\tilde{S}_n^1 - \tilde{k}| = |S_n^1 - \tilde{k}(1+r)^n| \end{aligned}$$

4. (a) On peut écrire

$$(1+r)^{N-n} \Pi_n(g) = \mathbf{E}^*[S_N^1 \vee k \mid \mathcal{F}_n] = \mathbf{E}^*[S_n^1 T_{n+1} \cdots T_N \vee k \mid \mathcal{F}_n] = u(n, S_n^1)$$

quand on a posé $u(n, s) = \mathbf{E}^*[s T_{n+1} \cdots T_N \vee k]$.

On peut calculer explicitement u à l'aide d'un lemme du cours relatif au conditionnement : on a

$$u(n, s) = \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N-n}{j} p^j (1-p)^{N-n-j} [s(1+a)^j (1+b)^{N-n-j} \vee k]$$

d'où

$$\Pi_n(g) = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N-n}{j} p^j (1-p)^{N-n-j} [S_n^1 (1+a)^j (1+b)^{N-n-j} \vee k]$$

(b) Appelons $\Phi = (\phi^0, \phi^1)$ un portefeuille autofinancé simulant g . On a alors

$$\Pi_n(g) = u(n, S_n^1) = V_n(\Phi) = \phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n S_n^1;$$

on en tire l'égalité $u(n, T_n S_{n-1}^1) = \phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n^1 T_n S_{n-1}^1$; se rappelant que T_n prend les 2 valeurs $1+a, 1+b$ on voit que cette dernière égalité est équivalente au système

$$\begin{cases} u(n, (1+a)S_{n-1}^1) 1_{\{T_n=1+a\}} = [\phi_n^0 (1+r)^n + (1+a)\phi_n^1 S_{n-1}^1] 1_{\{T_n=1+a\}} \\ u(n, (1+b)S_{n-1}^1) 1_{\{T_n=1+b\}} = [\phi_n^0 (1+r)^n + (1+b)\phi_n^1 S_{n-1}^1] 1_{\{T_n=1+b\}} \end{cases}$$

Après conditionnement par \mathcal{F}_{n-1} sous \mathbf{P}^* , ce système devient

$$\begin{cases} u(n, (1+a)S_{n-1}^1) = \phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n (1+a)S_{n-1}^1 \\ u(n, (1+b)S_{n-1}^1) = \phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n (1+b)S_{n-1}^1 \end{cases}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \phi_n^0 &= \frac{(1+b)u(n, (1+a)S_{n-1}^1) - (1+a)u(n, (1+b)S_{n-1}^1)}{(b-a)(1+r)^n} \\ \phi_n^1 &= \frac{u(n, (1+b)S_{n-1}^1) - u(n, (1+a)S_{n-1}^1)}{(b-a)S_{n-1}^1} \end{aligned}$$

Les résultats concernant l'option f peuvent être obtenus simplement en utilisant les égalités (1).