Université René Descartes

Maitrise M.A.S.S (Mathématiques financières)

Examen - 6 Mai 2004

Durée : 3H   Documents interdits

Problème

Soit $(\Omega, (S_n), (\mathcal{F}_n), \mathbf{P})$ un marché financier viable et complet.
On adoptera les notations générales du cours : en particulier, le prix à la date n d'une option européenne h sera noté $\Pi_n(h)$. Si k un réel positif, on introduit 2 options européennes f et g par les égalités

$$f = S_N^1 \wedge k \quad ; \quad g = S_N^1 \vee k$$

1. Montrer les égalités

$$\Pi_n(f) + \Pi_n(g) = \tilde{k}(1+r)^n + S_n^1 \quad \forall n \in \{1, 2, \ldots, N\} \tag{1}$$

2. Un investisseur désire constituer un portefeuille à la date 0 comprenant

   - une options f
   - une option g
   - l'emprunt d'une unité de l'actif sous-jacent

   De quelle somme doit il disposer à la date 0 ? La sratégie consistant à ne pas modifier ce portefeuille jusqu'à la date d'exercice N vous parait-elle risquée ?

3. Un deuxième investisseur constitue un portefeuille ϕ de la manière suivante : à la date 0 il achète une option g, emprunte une option f et ne modifie plus sa composition jusqu'à la date N ; montrer que la valeur à la date n de ceportefeuille vérifie l'inégalité

$$V_n(\phi) \geq |S_n - \tilde{k}(1+r)^n|$$

4. On suppose maintenant que le marché financier est un marché viable de Cox, Ross et Rubinstein.

   (a) Calculer explicitement $\Pi_n(g)$ et $\Pi_n(f)$.

   (b) Déterminer les portefeuilles de couverture des options f et g.