

Problème

Soit $(\Omega, (S_n), (\mathcal{F}_n), \mathbf{P})$ un marché financier de Cox, Ross et Rubinstein tel que $a < r < b$ et $N \geq 2$.

On adoptera les notations générales du cours : en particulier, le prix à la date n d'une option européenne h sera noté $\Pi_n(h)$.

On notera h l'option européenne définie par

$$h = \sqrt{S_{N-1}^1 S_N^1}$$

1. (a) Montrer qu'il existe un nombre réel α , que l'on calculera explicitement en fonction de a , b et r tel que

$$\Pi_n(h) = \alpha S_n^1 \quad \forall n \leq N - 1$$

- (b) On se place maintenant à la date N ; est il encore vrai que $\Pi_N(h)$ est une fonction déterministe de S_N ?

2. Montrer que

$$\Pi_n(h) \leq \frac{S_n^1}{\sqrt{1+r}} \quad \forall n \leq N - 1 .$$

Cette inégalité est-elle encore vraie pour $n = N$?

3. (a) On appelle $(\phi_n ; n = 1, 2, \dots, N)$ le portefeuille de couverture de h ; calculer explicitement ϕ_n pour $n < N$ puis pour $n = N$.
- (b) Vérifier que ce portefeuille est autofinancé