

**Maîtrises Math-Mass 2000-2001**  
**Corrigé de l'examen du 11 septembre 2001**

1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^n |X_k| \right] &= n \mathbb{E}_\theta [|X_1|] = n \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right) dx \\ &= n \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) dx = n \left[ (-x - \theta) \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \right]_0^{+\infty} = n\theta \\ \text{var}_\theta \left( \sum_{k=1}^n |X_k| \right) &= n \text{var}_\theta (|X_1|) = n \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right) dx - n\theta^2 \\ &= n \left[ (-x^2 - 2\theta x - 2\theta^2) \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \right]_0^{+\infty} - n\theta^2 = n\theta^2 \end{aligned}$$

2. Le  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  ; on choisit donc  $\Omega = \mathbb{R}^n$  comme espace des observations, muni de la tribu des boréliens  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Pour tout  $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+^*$ , la loi  $\mathbb{P}_\theta$  est celle de  $n$  variables de Laplace indépendantes, et sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  vaut

$$\begin{aligned} \forall (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \\ \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\lambda_{\mathbb{R}^n}}(x_1, \dots, x_n) &= f_\theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) \\ &= \frac{1}{(2\theta)^n} \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i|\right) \\ &= \exp(Q(\theta)T(x_1, \dots, x_n) - \varphi(\theta)), \end{aligned}$$

avec  $Q(\theta) = -1/\theta$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ , et  $\varphi(\theta) = n \ln(2\theta)$ . Le modèle statistique  $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$  est donc un modèle exponentiel. L'ensemble image  $Q(\Theta) = \mathbb{R}$  est d'intérieur non vide ; il n'y a pas de relation linéaire non triviale entre les différentes statistiques présentes sous l'exponentielle car il n'y en a qu'une seule ; on en déduit que  $T(X_1, \dots, X_n)$  est une statistique exhaustive et complète (donc minimale).

3. La vraisemblance  $L(\theta, x_1, \dots, x_n) = f_\theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  est toujours strictement positive. On peut donc ramener son étude à celle de la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned} \ln L(\theta, x_1, \dots, x_n) &= -\frac{1}{\theta}T - n \ln(2\theta) \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta}(\theta, x_1, \dots, x_n) &= \frac{T}{\theta^2} - \frac{n}{\theta} \end{aligned}$$

La dérivée  $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$  est positive pour  $\theta \in ]0, T/n[$ , nulle en  $\theta = T/n$ , et négative pour  $\theta > T/n$ . On en déduit que le maximum de  $\ln L$  est atteint en

$\theta = T/n$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  est donc

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$$

Cet estimateur est sans biais car  $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n] = \frac{1}{n} \mathbb{E}_\theta[\sum_{i=1}^n |X_i|] = \frac{1}{n} n\theta = \theta$ , d'après la question 1. Il est fortement consistant d'après la loi forte des grands nombres. En effet, les v.a.  $|X_i|$  sont identiquement distribuées, indépendantes, et intégrables :  $E_\theta[|X_i|] < +\infty$ . On en déduit que leur moyenne  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$  converge p.s., sous  $\mathbb{P}_\theta$ , vers leur espérance  $\mathbb{E}_\theta[|X_i|] = \theta$ . Autrement dit,  $\hat{\theta}_n$  converge  $\mathbb{P}_\theta$ -p.s. vers  $\theta$ , ce qui signifie bien qu'il est fortement consistant.

4. Le modèle est régulier car  $\Theta = \mathbb{R}_+^*$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $Q(\theta) = -1/\theta$  est une fonction  $C^1$  sur  $\Theta$ , de dérivée ne s'annulant pas. On en déduit en outre que  $T(X_1, \dots, X_n)$  est un estimateur régulier, efficace et UVMB de son espérance, qui vaut  $n\theta$ . Il s'ensuit que  $\hat{\theta}_n = T/n$  est un estimateur régulier, efficace et UVMB de  $\theta$ . La variance d'un estimateur efficace de  $\theta$  vaut donc celle de  $\hat{\theta}_n$  :  $\text{var}_\theta(\hat{\theta}_n) = \text{var}_\theta(\sum_{i=1}^n |X_i|)/n^2 = \theta^2/n$ . Or, d'après l'inégalité de Cramer-Rao, on sait que si  $S$  est un estimateur efficace de  $g(\theta)$ , alors  $I_n(\theta) = (g'(\theta))^2 / \text{var}_\theta(S)$ , avec  $I_n(\theta)$  l'information de Fisher du modèle. On en déduit  $I_n(\theta) = 1 / \text{var}_\theta(\hat{\theta}_n) = n/\theta^2$ .
5. Les v.a.  $|X_i|$  sont de même loi, indépendantes, et de carré intégrable :  $\mathbb{E}_\theta[|X_i|^2] < +\infty$ . On déduit alors du théorème de limite centrale que sous  $\mathbb{P}_\theta$

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| - \mathbb{E}_\theta \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| \right]}{\sqrt{\text{var}_\theta \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| \right)}} = \frac{\sqrt{n}}{\theta} (\hat{\theta}_n - \theta)$$

converge en loi quand  $n$  tend vers  $+\infty$  vers  $Z$ , une gaussienne centrée réduite. Par approximation, pour  $n$  grand, on égalise donc  $\frac{\sqrt{n}}{\theta} (\hat{\theta}_n - \theta)$  et  $Z$ . D'où

$$\hat{\theta}_n \simeq \theta + \frac{\theta}{\sqrt{n}} Z \text{ de loi } \mathcal{N}(\theta, \theta^2/n)$$

On pose  $m(\theta) = \theta$  et  $\sigma^2(\theta) = \theta^2/n$ .

6. En reprenant les notations de la question précédente, on a  $\mathbb{P}(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ . Par approximation, il en résulte

$$\mathbb{P}_\theta \left( -1,96 \leq \frac{\sqrt{n}}{\theta} (\hat{\theta}_n - \theta) \leq 1,96 \right) \simeq 0,95$$

D'où finalement

$$\mathbb{P}_\theta \left( \theta \in \left[ \frac{\hat{\theta}_n}{1 + \frac{1,96}{\sqrt{n}}}, \frac{\hat{\theta}_n}{1 - \frac{1,96}{\sqrt{n}}} \right] \right) \simeq 0,95$$

7. Il s'agit d'un problème de test unilatère. Comme  $Q(\theta)$  est strictement croissante, la famille des densités est à rapport de vraisemblance croissant en la statistique  $T$ , comme en la statistique  $\hat{\theta}_n$ . On sait que dans ce cas

on peut construire un test UPP de niveau  $\alpha$  dont la fonction critique a la forme suivante :

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\theta}_n > c \\ \gamma & \text{si } \hat{\theta}_n = c \\ 0 & \text{si } \hat{\theta}_n < c \end{cases}$$

Comme  $\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n = c) = 0$  quels que soient  $\theta$  et  $c$ , on peut plus simplement se ramener à un test de la forme

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\theta}_n > c \\ 0 & \text{si } \hat{\theta}_n \leq c \end{cases}$$

avec  $c$  déterminé par la condition  $\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi] = \alpha$ . On peut déduire de l'approximation gaussienne une approximation de  $c$ . En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0}[\phi] &= \mathbb{P}_{\theta_0}(\hat{\theta}_n > c) \\ &= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}}{\theta_0}(\hat{\theta}_n - \theta_0) > \frac{\sqrt{n}}{\theta_0}(c - \theta_0)\right) \\ &\simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{\sqrt{n}}{\theta_0}(c - \theta_0)\right) \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{P}(Z > 1,96) = \mathbb{P}(|Z| > 1,96)/2 = 0,05/2 = 0,025$ . On en déduit que le test sera de niveau  $\alpha = 0,025$  si, approximativement,

$$1,96 \simeq \frac{\sqrt{n}}{\theta_0}(c - \theta_0)$$

Il en résulte que  $c \simeq \theta_0(1 + 1,96/\sqrt{n}) = 1,196$ , avec  $\theta_0 = 1$  et  $n = 100$ .

Remarque : la valeur exacte de  $c$  est 1,205, qu'on peut calculer en notant que  $\sum_{i=1}^n |X_i|$  suit une loi  $\Gamma(n, 1/\theta)$  sous  $\mathbb{P}_\theta$ .

8. L'estimateur bayésien de  $\theta$  relativement à la loi a priori  $\nu(d\theta) = q(\theta)d\theta$  est donné par la formule

$$S(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int_{\Theta} \theta f_\theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \nu(d\theta)}{\int_{\Theta} f_\theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \nu(d\theta)}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} \theta f_\theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \nu(d\theta) &= \int_0^{+\infty} \theta \frac{1}{(2\theta)^n} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\hat{\theta}_n\right) \frac{\alpha}{\theta^2} \exp\left(-\frac{\alpha}{\theta}\right) d\theta \\ &= \frac{\alpha}{2^n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta^{n+1}} \exp\left(-\frac{\alpha + n\hat{\theta}_n}{\theta}\right) d\theta \\ &= \frac{\alpha}{2^n} \left[ -\frac{1}{n\theta^n} \exp\left(-\frac{\alpha + n\hat{\theta}_n}{\theta}\right) \right]_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{2^n} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha + n\hat{\theta}_n}{n\theta^{n+2}} \exp\left(-\frac{\alpha + n\hat{\theta}_n}{\theta}\right) d\theta \\ &= 0 + \frac{\alpha + n\hat{\theta}_n}{n} \int_{\Theta} f_\theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \nu(d\theta) \end{aligned}$$

où l'on s'est servi de ce que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} -\frac{1}{n\theta^n} \exp\left(-\frac{\alpha + n\hat{\theta}_n}{\theta}\right) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \dots = 0$ .

Il s'ensuit que l'estimateur bayésien  $S$  vaut  $\hat{\theta}_n + \frac{\alpha}{n}$ .