Université René Descartes

UFR de Mathématiques et Informatique

EXAMEN DE STATISTIQUE - 1ère Session

MAITRISE de MATHEMATIQUES et MAITRISE MASS

Année 2000-2001

Exercice 1

On observe un n-échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la loi de Poisson de paramètre inconnu $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. On veut estimer θ^k, $k \in \mathbb{Z}^*$ étant fixé.

1. Montrer que le modèle statistique considéré est exponentiel . Donner une statistique exhaustive et complète pour θ.
   On pose $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Rappeler la loi de T.
2. On veut estimer θ^k, $k \in \mathbb{N}^*$ étant fixé.
   (a) Montrer que $S = \dfrac{T(T-1)\dots(T-k+1)}{n^k}$ est l'unique estimateur sans biais uniformément de variance minimum parmi les estimateurs sans biais de θ^k.
   (b) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ^k. Justifier sans calcul qu'il n'est pas sans biais.
3. Etant donné une application borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, justifier que :

$$E_\theta(f(T)) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} f(j)\frac{(n\theta)^j}{j!}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(n\theta)^j}{j!}}$$

   et en déduire qu'il n'existe pas d'estimateur sans biais uniformément de variance minimum de θ^{-k}, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

On observe un n-échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la loi normale $\mathcal{N}(\theta, 1)$, θ étant un paramètre inconnu appartenant à $\mathbb{R}$.

1. Montrer que le modèle statistique considéré est exponentiel.
2. On veut tester l'hypothèse $H_0 : \theta = 0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta \neq 0$. Exprimer, à l'aide de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, la fonction puissance du test de fonction critique $\varphi = \mathbf{1}_{]c,+\infty[}(|\overline{X}|)$ où $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ et où c est un nombre réel positif donné ; montrer que cette fonction puissance est paire.
   On note α le niveau du test φ ; montrer que ce test φ est uniformément le plus puissant parmi les tests sans biais (UPPB) au seuil α.

3. Donner le test le plus puissant, au seuil α donné, de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_2 : \theta = 1$, puis celui de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_3 : \theta = -1$.
4. On teste maintenant l'hypothèse $H_0 : \theta = 0$ contre $H_4 : |\theta| = 1$.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de test uniformément le plus puissant (UPP).
   (b) Pour $n = 4$, à l'aide de la table fournie, déterminer le niveau α_o du test de fonction critique $\varphi'_o = \mathbf{1}_{]-\infty,-\frac{1}{2}[\cup]0,+\infty[}(\overline{X})$. φ'_o est-il sans biais ?
   (c) Pour $n = 4$, à l'aide de la table fournie, déterminer la valeur de la constante c_0 telle que $\varphi_o = \mathbf{1}_{]c_o,+\infty[}(|\overline{X}|)$ soit de niveau α_o et calculer sa fonction puissance. En déduire que φ_o n'est pas UPPB au seuil α_o .