Université Paris 5 - René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Maîtrises Math-Mass 2000-2001

Partiel du 7 décembre 2000

10h - 12h30

1. On considère un modèle statistique $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\theta, \theta \in]0,1[))$ avec $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, et $\mathbb{P}_\theta$ la loi de densité par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x.$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi $\mathbb{P}_\theta$.

   (a) Montrer qu'il s'agit d'un modèle exponentiel de rang plein, dont on précisera l'espace canonique des paramètres.

   (b) Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta[X] &= \frac{1}{\theta} - 1 \\ \mathrm{var}_\theta(X) &= \frac{1-\theta}{\theta^2} \\ \mathbb{E}_\theta[z^X] &= \frac{\theta}{1 - z(1-\theta)} \quad \forall z \in]-\frac{1}{1-\theta}, \frac{1}{1-\theta}[\end{aligned}$$

   (c) Calculer l'information de Fisher de X après avoir justifié son existence.

2. On considère, dans cette question et les suivantes, $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires de même loi que X précédemment défini, et $(\Omega^n, \mathcal{A}^{\otimes n}, (\mathbb{P}_\theta^{\otimes n}, \theta \in]0,1[))$ le modèle statistique associé.

   (a) Montrer que $T_n = X_1 + \cdots + X_n$ est une statistique exhaustive, complète et minimale pour ce modèle statistique, après avoir rappelé la signification de ces trois termes. Montrer que c'est un estimateur régulier et efficace de $n(\frac{1}{\theta} - 1)$.

   (b) Calculer l'information de Fisher de $(X_1, \dots, X_n)$.

   (c) Montrer que

$$\mathbb{P}_\theta^{\otimes n}(T_n = k) = \theta^n (1-\theta)^k \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

   Indication : on pourra s'aider de la fonction caractéristique $\mathbb{E}_\theta[z^X]$, ainsi que du développement en série entière $\frac{1}{(1-u)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} u^k$, $\forall u \in]-1, 1[$.

3. On souhaite estimer le paramètre θ à l'aide de $(X_1, \dots, X_n)$.

(a) Déterminer un estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Montrer que cet estimateur est fortement consistant, et qu'il est asymptotiquement efficace.

(b) Par la méthode des moments, proposer un autre estimateur.

(c) Déterminer un estimateur uniformément de variance minimale et sans biais de θ.

Indication : on pourra utiliser le fait que $1_{X_1=0}$ est un estimateur sans biais de θ.

4. On suppose ici que $\theta \geq 0,5$. Construire un intervalle de confiance de θ au seuil $1-\alpha$, avec $\alpha \in]0,1[$.

Indication : on pourra d'abord construire un intervalle de confiance pour $\frac{1}{\theta} - 1$ en fonction de T_n et en se servant de l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

5. On souhaite tester $H_0 : \theta \leq \theta_0$, contre $H_1 : \theta > \theta_0$.

(a) Donner la forme générale d'un test uniformément plus puissant de niveau α.

(b) Application numérique : $n = 100$, $\alpha = 0,1$, $\theta_0 = 0,4$; déterminer approximativement les bornes de la région critique.

6. On considère sur l'espace des paramètres $]0,1[$ la loi a priori de densité

$$\mu(\theta) = \frac{1}{\beta(a,b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}$$

avec $\beta(a,b) = \int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} d\theta = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, et a, b deux réels strictement positifs. On rappelle que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. Donner l'expression du risque bayésien quadratique d'un estimateur de θ, puis déterminer un estimateur bayésien de θ. Indication : on pourra d'abord montrer qu'on peut le supposer fonction de T_n.