Université René Descartes

UFR de Mathématiques et Informatique

EXAMEN DE STATISTIQUE - 2ème Session

MAITRISE de MATHEMATIQUES et MAITRISE MASS

Année 2000-2001 - mardi 11 septembre - 14h-17h

On observe un n-échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la première loi de Laplace de densité f_θ, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta}\, exp(-\frac{|x|}{\theta})$$

θ étant un paramètre inconnu appartenant à $\mathbb{R}_+^*$.

1. Calculer $E(\sum_{k=1}^n |X_k|)$ et $Var(\sum_{k=1}^n |X_k|)$.

2. Donner la densité de la loi du n-échantillon et montrer que le modèle statistique considéré est exponentiel.

   Proposer une statistique exhaustive et complète pour $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ. Est-il sans biais ? Est-il fortement consistant ?

4. Montrer que le modèle est régulier. Calculer l'information de Fisher du modèle. Quelle est la variance d'un estimateur efficace de θ ? Déterminer un estimateur de θ uniformément de variance minimum parmi les estimateurs sans biais.

5. Justifier que la loi de $\widehat{\theta}_n$ peut être approchée pour "n grand" par une loi normale $\mathcal{N}(m(\theta), \sigma^2(\theta))$ dont on donnera les paramètres $m(\theta)$ et $\sigma^2(\theta)$.

6. Soit X une variable aléatoire de la loi $\mathcal{N}(0.1)$, on donne que $P(|X| < 1,96) = 0.95$. En déduire avec l'approximation précédente un intervalle de confiance à 95% pour θ.

7. On souhaite tester l'hypothèse H_0 : $\theta \leq \theta_0$ contre l'hypothèse H_1 : $\theta > \theta_0$.

   Donner la forme générale d'un test uniformément le plus puissant au seuil α.

   Dans le cas où $\alpha = 0,025$, $\theta_0 = 1$ et $n = 100$, déterminer la région critique en utilisant l'approximation considérée à la question numéro 5.

8. Déterminer l'estimateur bayésien de θ pour la loi a priori de densité q, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad q(\theta) = \frac{\alpha}{\theta^2} \; exp(-\frac{\alpha}{\theta}) \; \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\theta)$$

   α étant connu appartenant à $\mathbb{R}_+^*$.

   On rappelle que, pour p entier, on a :

$$\int_0^{+\infty} y^p e^{-y} \; dy = p!$$