Université René Descartes

UFR de Mathématiques et Informatique

EXAMEN DE STATISTIQUE - 1ère Session

MAITRISE de MATHEMATIQUES et MAITRISE MASS

Année 2001-2002

Vendredi 25 janvier 2002 - 13h30-16h30

Le sujet comporte 2 pages

Les documents ne sont pas autorisés à l'exception des notes de cours polycopiées

Exercice 1

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi normale de même variance $\sigma^2 > 0$. On suppose que leurs espérances vérifient $E(X_i) = m_1$, $E(Y_i) = m_2$ et $E(Z_i) = m_1 + m_2$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, m_1 et m_2 étant deux réels.

On pose :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad \overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 \quad S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2$$

1. On suppose σ^2 connu, m_1 et m_2 inconnus.
   (a) Donner la densité de la loi de $(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.
   Justifier que le modèle statistique considéré est exponentiel.
   Montrer qu'il existe une statistique exhaustive complète minimale pour $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ et donner son expression à l'aide de $\overline{X}$, $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$.
   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les estimateurs sans biais de $am_1 + bm_2$ qui sont des combinaisons linéaires de $\overline{X}$, $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ et des fonctions de la statistique exhaustive complète précédente.
   (c) Justifier qu'il existe un unique estimateur S de $am_1 + bm_2$ qui soit sans biais uniformément de variance minimum parmi les estimateurs sans biais de carré intégrable de $am_1 + bm_2$. Calculer sa fonction de risque.
   Comparer S et $a\overline{X} + b\overline{Y}$ pour l'estimation de $am_1 + bm_2$.
2. On suppose m_1, m_2 et σ^2 inconnus.
   (a) Justifier que le modèle statistique considéré est linéaire et le décrire sous la forme matricielle habituelle $U = X\beta + \epsilon$ en indiquant ce que sont ici U, X , β et ϵ.
   Le modèle est-il régulier ?

(b) Donner les estimateurs de $m_1,\ m_2$ et σ^2 obtenus par la méthode des moindres carrés ; on les exprimera à l'aide de $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, S_X^2, S_Y^2 et S_Z^2 et on vérifiera que l'estimateur de σ^2 peut être mis sous la forme $\lambda(S_X^2+S_Y^2+S_Z^2)+\mu(\overline{X}+\overline{Y}-\overline{Z})^2$, λ et μ étant deux réels que l'on donnera.

(c) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, donner l'estimateur des moindres carrés de am_1+bm_2.

Exercice 2

On considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la loi de densité f_θ, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]-1,1[$, définie par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_\theta(x) = \frac{\theta+1}{2}(1-|x|)^\theta$$

θ étant un paramètre inconnu appartenant à $]-1,+\infty[$.

1. Donner la densité de la loi du n-échantillon et montrer que le modèle statistique considéré est exponentiel.

   Proposer une statistique exhaustive minimale pour $\theta \in]-1,+\infty[$.

2. On pose

   $$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1-|X_i|)$$

   Donner les valeurs de $E_\theta(T_n)$ et $Var_\theta(T_n)$.

   Donner la loi limite de $\sqrt{n}(T_n + \dfrac{1}{\theta+1})$ quand n tend vers l'infini.

3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta_n}$ de θ. Montrer qu'il est fortement consistant et asymptotiquement normal (donner la variance de la loi limite).

4. On souhaite tester l'hypothèse $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta > \theta_0$ au seuil α. Justifier qu'il existe un test uniformément le plus puissant et donner sa forme générale. Dans le cas où $\alpha = 0,01$, $\theta_0 = 1$ et $n = 100$, donner une approximation de la région critique en utilisant la question 3 (on donne que $P(N < 2,326) = 0,99$ si N est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$).