

## EXAMEN DE STATISTIQUE

MAITRISE de MATHEMATIQUES et MAITRISE MASS

2ème Session - Année 2001-2002

Vendredi 13 Septembre 2002- 14h-17h

(Aucun document autre que le polycopié du cours n'est autorisé)

### Exercice 1

On observe une suite  $(X_p)_{p \geq 1}$  de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi normale  $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  étant connu et  $\theta$  étant un paramètre réel inconnu.

On veut tester  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta = \theta_1$  où  $\theta_0$  et  $\theta_1$  sont donnés,  $\theta_0 < \theta_1$ .

1. (a)  $n \in \mathbb{N}^*$  étant fixé, donner, à l'aide de la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , le test optimum au seuil  $\alpha$  fondé sur l'observation du n-échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Quelle est sa puissance et comment varie-t-elle en fonction de la taille  $n$  de l'échantillon à seuil  $\alpha$  fixé ?

Déterminer complètement le test et donner la valeur de sa puissance dans le cas où  $\sigma^2 = 1$ ,  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 1,5$ ,  $\alpha = 0,05$  et  $n = 36$  puis  $n = 100$ .

- (b) Donner, à l'aide de la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , la valeur  $n_0$  du plus petit des entiers  $n$  pour lesquels le test optimum au seuil  $\alpha$  de  $H_0$  contre  $H_1$ , fondé sur l'observation du n-échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , soit de puissance supérieure ou égale à  $\beta$  fixé.

Calculer  $n_0$  dans le cas où  $\sigma^2 = 1$ ,  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 1,5$ ,  $\alpha = 0,05$  et  $\beta = 0,95$  (on donne  $16 \times (1,645)^2 = 43,3$ ).

2. (a) On note  $p_\theta$  la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  de la loi  $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$  et on pose :

$$Z_1 = \ln \frac{p_{\theta_1}(X_1)}{p_{\theta_0}(X_1)}$$

Calculer  $E_{\theta_0}(Z_1)$  et  $E_{\theta_1}(Z_1)$ .

- (b) On considère le test séquentiel séquentiel du rapport de vraisemblance, fondé sur l'observation de la suite  $(X_p)_{p \geq 1}$ , de niveau  $\alpha$  et de puissance  $\beta$  donnés. Soit  $N$  le nombre d'observations effectuées. Donner des valeurs approchées de  $E_{\theta_0}(N)$  et  $E_{\theta_1}(N)$ . Calculer ces valeurs approchées dans le cas où  $\sigma^2 = 1$ ,  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_1 = 1,5$ ,  $\alpha = 0,05$  et  $\beta = 0,95$  (on donne  $7,2 \ln 19 = 21,2$ ). Comparer avec  $n_0$  et conclure.

## Exercice 2

On considère un  $n$ -échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de la loi de densité  $f_\theta$ , par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_\theta(x) = x \theta^{-\frac{x^2}{2}} \ln \theta$$

$\theta$  étant un paramètre inconnu appartenant à  $]1, +\infty[$ .

1. Donner la densité de la loi du  $n$ -échantillon et montrer que le modèle statistique considéré est exponentiel.  
Proposer une statistique exhaustive minimale pour  $\theta \in ]1, +\infty[$ .

2. On pose :

$$T_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Justifier que  $T_n$  est un estimateur uniformément de variance minimum parmi les estimateurs sans biais (UVMB) et efficace de  $\frac{1}{\ln \theta}$ .

3. Justifier que la suite  $(T_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'estimateurs de  $\frac{1}{\ln \theta}$  fortement consistante et asymptotiquement normale ; donner la variance de la loi limite de  $\sqrt{n}(T_n - \frac{1}{\ln \theta})$  en admettant que  $E_\theta(X_1^4) = \frac{8}{(\ln \theta)^2}$ .
4. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$ . Montrer qu'il est fortement consistant et asymptotiquement normal ; donner la variance de la loi limite de  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ .
5. Calculer de deux faons l'information de Fisher apportée par le modèle statistique au sujet de  $\theta$  et vérifier que  $\hat{\theta}_n$  est asymptotiquement efficace pour l'estimation de  $\theta$ .