Université de Paris 5 – René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Maîtrises Maths-MASS - Statistiques générales

Partiel du 26 novembre 2002

12h15 - 14h45

Les documents ne sont pas autorisés.

Le sujet comporte deux pages.

Ex 1. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables de Poisson de paramètre de $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_\theta (X_i = k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

1. Préciser le modèle statistique associé à $(X_1, \ldots, X_n)$, et montrer que $\bar{X}_n$ est une statistique exhaustive, complète et minimale.
2. Montrer que le modèle statistique est régulier, et que $\bar{X}_n$ est une statistique régulière et un estimateur UVMB (uniformément de variance minimale parmi les estimateurs sans biais) et efficace de θ. Calculer l'information de Fisher $I_n(\theta)$ du modèle.
3. Rappeler la valeur de $\mathbb{E}_\theta [X_1]$ et de $\mathrm{var}_\theta (X_1)$. En déduire, par la méthode de substitution, un estimateur de θ différent de $\bar{X}_n$.
4. On pose $T = (\bar{X}_n + \frac{1}{n})/(1 + \frac{1}{n})$. Si l'on suppose que l'on a affaire à un modèle d'échantillonage, et que l'on peut faire tendre n vers l'infini, montrer que T est un estimateur fortement consistant de θ. Calculer les fonctions de risque de $\bar{X}_n$ et de T. Sont-elles comparables ?
5. On suppose dans cette seule question que $\Theta = [0, 1]$. Entre $\bar{X}_n$ et T, quel est le meilleur estimateur au sens du risque minimax ?
6. Calculer et comparer le risque bayésien de $\bar{X}_n$ et de T relatif à la loi a priori ν sur Θ, avec ν loi exponentielle de paramètre 1. Indication : $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = k!\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Ex 2. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires de loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} 1_{x \geq \theta}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Préciser le modèle statistique associé à $(X_1, \ldots, X_n)$, et montrer que $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ est une statistique exhaustive.
2. Calculer la densité de la loi de $X_{(1)}$. Montrer que $X_{(1)}$ est une statistique complète. En déduire qu'elle est minimale.

3. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.
4. Calculer $\mathbb{E}_\theta\left[X_{(1)}\right]$. En déduire l'estimateur UVMB de θ.
5. Calculer $\mathbb{E}_\theta\left[\bar{X}_n\right]$, avec $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}_\theta\left[\bar{X}_n | X_{(1)}\right]$.
6. On suppose désormais que l'on a affaire à un modèle d'échantillonage, et que l'on peut faire tendre n vers l'infini. Montrer que $X_{(1)}$ est un estimateur faiblement consistant de θ. A l'aide du lemme de Borel-Cantelli, montrer qu'il est aussi fortement consistant.
7. Montrer que $n(X_{(1)} - \theta)$ converge en loi quand n tend vers l'infini vers une loi que l'on déterminera. L'estimateur $X_{(1)}$ est-il asymptotiquement sans biais ?