Université René Descartes

UFR de Mathématiques et Informatique

EXAMEN DE STATISTIQUE

MAITRISE de MATHEMATIQUES et MAITRISE MASS

2ème Session - Année 2002-2003

10 septembre 2003- 14h-17h

Le sujet comporte 3 pages.

Aucun document autre que le polycopié du cours ou les tables statistiques n'est autorisé.

Exercice 1

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi normale de même variance égale à 1. On suppose que leurs espérances vérifient $E(X_i) = \lambda$ et $E(Y_i) = \mu$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, λ et μ étant deux réels inconnus.

On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Donner la densité de la loi de $(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2n}$.
2. Déterminer les estimateurs du maximun de vraisemblance de λ et μ.
3. Déterminer le test optimun de l'hypothèse H_0: $\lambda = 2$ et $\mu = 4$ contre l'hypothèse H_1: $\lambda = \mu = 3$, au seuil α.

   Dans le cas o $\alpha = 0,05$, donner la région critique et la puissance de ce test.

4. Déterminer le test du maximun de vraisemblance de l'hypothèse H_0: $\lambda = 2$ et $\mu = 4$ contre l'hypothèse H_1: $\lambda \neq 2$ ou $\mu \neq 4$, au seuil α.
   Vérifier que la région critique s'exprime en fonction de la variable aléatoire
   $$T_n = n(\overline{X_n} - 2)^2 + n(\overline{Y_n} - 4)^2$$
   Quelle est la loi de cette variable aléatoire sous l'hypothèse H_0 ?
   Que conclut-on, au seuil $\alpha = 0,05$, si la valeur observée de T_n est égale à 10 ?

Exercice 2

Soit $(U_1, U_2, \cdots, U_n, V_1, V_2, \cdots, V_n)$ un vecteur gaussien tel que $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ soit un n-échantillon de la loi $\mathcal{N}(\beta_1, \sigma^2)$ et $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ un n-échantillon de la loi $\mathcal{N}(\beta_2, \sigma^2)$ et que, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $Cov(U_i, V_i) = \rho$.

β_1 , β_2 et σ^2 sont inconnus, ρ est connu et appartient à $]-1, 1[$.

Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on pose :

$$X_i = \frac{U_i - V_i}{\sqrt{2(1-\rho)}} \quad , \quad Y_i = \frac{U_i + V_i}{\sqrt{2(1+\rho)}}$$

1. Donner les lois de X_i et Y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Vérifier que $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes.
2. Justifier que le modèle statistique lié à l'observation de $Z = (X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ est linéaire et le décrire sous la forme matricielle habituelle $Z = A\beta + \epsilon$ en indiquant ce que sont ici A , β et ϵ.
   Le modèle est-il régulier ?

Exercice 3

Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un n-échantillon de la loi binomiale $B(r, \theta)$, $r \in \mathbb{N}^*$ étant connu, θ étant un paramètre inconnu appartenant à $]0, 1[$:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ , \ \forall k \in \{0, 1, \ldots, r\} \ , \ \mathbb{P}_\theta(X_i = k) = C_r^k \ \theta^k (1-\theta)^{r-k}$$

On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Préciser le modèle statistique associé à $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Est-il exponentiel ?
   Justifier que $\overline{X_n}$ est une statistique exhaustive, complète et minimale.

2. Déterminer l'estimateur du maximun de vraisemblance de θ. On le note S_n. Montrer que c'est un estimateur du paramètre θ uniformément de variance minimum parmi les estimateurs sans biais (UVMB), efficace, fortement consistant et asymptotiquement normal.

3. Soit $a \geq 0$ et $b \geq 0$. On considère l'estimateur $T_{a,b,n} = \dfrac{\overline{X_n} + \frac{a}{n}}{r + \frac{b}{n}}$.

   Calculer les fonctions de risque, pour l'estimation de θ, de $T_{a,b,n}$ et S_n.

   Vérifier que, pour $a_0 = \dfrac{\sqrt{nr}}{2}$ et $b_0 = \sqrt{nr}$, la fonction de risque de $T_{a_0,b_0,n}$ est constante.
   S_n est-il meilleur que $T_{a_0,b_0,n}$?