

Maîtrises Maths-MASS - Statistiques générales

Corrigé du partiel du 21 novembre 2003

Ex 1.

1. Les observations sont réelles et positives. Le paramètre θ est réel et strictement positif. On considère donc le modèle statistique suivant

$$(\Omega = \mathbb{R}_+^n, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n), \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta = \mathbb{R}_+^*\})$$

avec \mathbb{P}_θ mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+^n , de densité le produit des densités des lois marginales, car les X_i sont indépendants entre eux :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^n, \quad \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\lambda_{\mathbb{R}_+^n}}(x) &= \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\theta^n} \exp\left(-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \\ &= \exp(Q(\theta)T(x) - \varphi(\theta))h(x) \end{aligned}$$

avec

$$Q(\theta) = -\frac{1}{2\theta}, \quad T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \varphi(\theta) = n \ln \theta, \quad h(x) = \prod_{i=1}^n x_i$$

Il s'agit donc d'un modèle exponentiel. On en déduit aussitôt que $T(X)$ est une statistique exhaustive. Comme $Q(\Theta) = \mathbb{R}_-^*$ contient une boule ouverte non vide, on en conclut que $T(X)$ est aussi une statistique complète, donc minimale. Enfin, Θ est un ouvert, et Q est une fonction dérivable, de dérivée $Q'(\theta) = 1/2\theta^2$ continue ne s'annulant pas ; il s'ensuit que le modèle est régulier, et que $T(X)$ est un estimateur UVMB, régulier et efficace de son espérance.

- 2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta [X_i^2] &= \int_0^{+\infty} x^2 \frac{x}{\theta} e^{-x^2/(2\theta)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} t \frac{1}{2\theta} e^{-t/(2\theta)} dt \text{ avec le ch}^\dagger \text{ de variables } t = x^2 \\ &= \left[-te^{-t/(2\theta)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t/(2\theta)} dt \text{ par IPP} \\ &= 0 + \left[-2\theta e^{-t/(2\theta)}\right]_0^{+\infty} = 2\theta \end{aligned}$$

(On remarque dans ce calcul que X_i^2 suit une loi exponentielle de moyenne 2θ .) On en déduit que $\hat{\theta}_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ est un estimateur sans biais de θ . Comme il est fonction de la statistique exhaustive et complète $T(X)$, il est UVMB d'après le corollaire du lemme de Lehmann-Scheffé. D'autre part, comme il ne diffère de $T(X)$ que par une constante multiplicative, c'est aussi un estimateur régulier et efficace de son espérance. Il y a donc égalité dans l'inégalité de Cramer-Rao, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= \frac{g'(\theta)^2}{\text{var}_\theta(\hat{\theta}_n)} \text{ avec } g(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n] \\ &= \frac{1}{\text{var}_\theta(\hat{\theta}_n)} \end{aligned}$$

où $I_n(\theta)$ dénote l'information de Fisher du modèle statistique. Or

$$\text{var}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{4n^2} \text{var}_\theta\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{4n} \text{var}_\theta(X_1^2)$$

car les X_i^2 sont indépendants et de même loi. Comme X_1^2 suit une loi exponentielle de moyenne 2θ , sa variance est égale à $4\theta^2$. À défaut de cette remarque, un calcul analogue à celui de l'espérance redonne ce résultat. D'où

$$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$$

On pouvait aussi calculer l'information de Fisher à l'aide des formules $I_n(\theta) = \text{var}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X)\right) = -\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(X)\right]$. Mais on ne pouvait utiliser $I_n(\theta) = \varphi''(\theta)$, cette égalité n'étant a priori vraie que dans le cas d'un modèle exponentiel canonique (même si bizarrement elle donne ici le bon résultat).

3. Les variables aléatoires $X_i^2/2$ sont indépendantes, de même loi, et intégrables : $\mathbb{E}_\theta[X_i^2/2] = \theta < +\infty$. D'après la loi forte des grands nombres, il en résulte que

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_\theta[X_1^2/2] = \theta \quad \mathbb{P}_\theta\text{-p.s.}$$

Autrement dit, $(\hat{\theta}_n, n \geq 1)$ est une suite d'estimateurs de θ fortement consistante. Comme on a de plus $\mathbb{E}_\theta[(X_i^2/2)^2] = 2\theta^2 < +\infty$, on peut appliquer aussi le théorème de limite central. D'où sous \mathbb{P}_θ

$$\frac{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mathbb{E}_\theta\left[\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right]}{\sqrt{\text{var}_\theta\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)}} = \frac{\sqrt{n}}{\theta} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1) \text{ en loi}$$

Ainsi $\hat{\theta}_n$ converge-t-il en loi vers θ à une vitesse d'ordre \sqrt{n} .

4. Le risque est somme de la variance et du carré du biais, *une formule presque unanimement oubliée, ce qui peut expliquer que personne n'ait su*

résoudre cette question.

$$\begin{aligned}
 R(\theta, T_n) &= \mathbb{E}_\theta \left[(T_n - \theta)^2 \right] \\
 &= \text{var}_\theta (T_n) + \mathbb{E}_\theta [T_n - \theta]^2 \\
 &= c_n^2 \text{var}_\theta (\hat{\theta}_n) + \left(c_n \mathbb{E}_\theta [\hat{\theta}_n] - \theta \right)^2 \\
 &= c_n^2 \frac{4\theta^2}{n} + \theta^2 (c_n - 1)^2 = \theta^2 P(c_n)
 \end{aligned}$$

avec $P(x) = \frac{4x^2}{n} + (x - 1)^2$. Le risque de $\hat{\theta}_n$ est donc bien proportionnel à θ^2 . Cherchons la valeur qui minimise P :

$$P(x) = x^2 \left(1 + \frac{4}{n} \right) - 2x + 1 = \left(1 + \frac{4}{n} \right) \left(x - \frac{1}{1 + \frac{4}{n}} \right)^2 + \text{cte}$$

Le minimum de P est donc atteint en $c_n = \frac{1}{1 + \frac{4}{n}} \neq 1$. D'où

$$\forall \theta > 0, \quad R \left(\theta, \frac{1}{1 + \frac{4}{n}} \hat{\theta}_n \right) = \theta^2 P \left(\frac{1}{1 + \frac{4}{n}} \right) < \theta^2 P(1) = R \left(\theta, \hat{\theta}_n \right)$$

Il appert ainsi que $\hat{\theta}_n$, quoiqu'estimateur UVMB et efficace de θ , n'est pas admissible.

Ex 2.

1. Les observations sont réelles. Le paramètre θ est réel. On considère donc le modèle statistique suivant

$$(\Omega = \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta = \mathbb{R}\})$$

avec \mathbb{P}_θ mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , de densité le produit des densités des lois marginales, car les X_i sont indépendants entre eux :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\lambda_{\mathbb{R}^n}}(x) &= \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) \\
 &= e^{-\sum_{i=1}^n x_i + n\theta} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x_i) \\
 &= e^{-\sum_{i=1}^n x_i + n\theta} \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x_{(1)})
 \end{aligned}$$

avec $x_{(1)} = \min(x_1, \dots, x_n)$. Cette densité est de la forme $g_\theta(x_{(1)})h(x)$, avec $g_\theta(u) = e^{n\theta} \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(u)$ et $h(x) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i}$. D'après le théorème de factorisation, la statistique $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ est exhaustive.

Déterminons sa loi :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_\theta (X_{(1)} > u) &= \mathbb{P}_\theta (X_1 > u, \dots, X_n > u) \\
 &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta (X_i > u) \text{ car les } X_i \text{ sont indépendants} \\
 &= \mathbb{P}_\theta (X_1 > u)^n \text{ car ils ont même loi.}
 \end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{P}_\theta (X_1 > u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \leq \theta \\ e^{\theta-u} & \text{si } u \geq \theta \end{cases}$$

D'où

$$\mathbb{P}_\theta (X_{(1)} > u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \leq \theta \\ e^{n\theta-nu} & \text{si } u \geq \theta \end{cases}$$

On en déduit que la loi de $X_{(1)}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , de densité

$$\forall u \in \mathbb{R}, f_\theta^{(1)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq \theta \\ -\frac{d\mathbb{P}_\theta(X_{(1)} > u)}{du} = ne^{n\theta-nu} & \text{si } u \geq \theta \end{cases} = ne^{n\theta-nu} 1_{[\theta, +\infty[}(u)$$

Montrons que $X_{(1)}$ est une statistique complète. Soit f une fonction borélienne quelconque, telle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(X_{(1)})$ soit intégrable sous \mathbb{P}_θ , et $\mathbb{E}_\theta [f(X_{(1)})] = 0$. Or

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}, \mathbb{E}_\theta [f(X_{(1)})] = 0 &\iff \forall \theta \in \mathbb{R}, \int_\theta^{+\infty} f(u)ne^{n\theta-nu} du = 0 \\ &\iff \forall \theta \in \mathbb{R}, \int_\theta^{+\infty} f(u)e^{-nu} du = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière assertion implique que $f(u)e^{-nu}$ est Lebesgue-presque partout nulle.

Rappelons l'argument : on montre facilement que cela implique que pour tout intervalle puis tout borélien borné A , $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(u)f(u)e^{-nu} du = 0$; on applique ce résultat à $A = \{u/f(u) \geq 0\} \cap [-N, N]$, et on en déduit que f est Lebesgue-presque partout négative sur $[-N, N]$, donc sur \mathbb{R} ; pour une raison symétrique, on en conclut que f est Lebesgue-presque partout nulle sur \mathbb{R} . Mais on pouvait aussi supposer f continue et dériver l'intégrale.

Il s'ensuit que $f(u)$ est Lebesgue-presque partout nulle, donc que $f(X_{(1)})$ est nulle \mathbb{P}_θ -p.s. Ce qui prouve que $X_{(1)}$ est bien une statistique complète.

Comme elle est aussi exhaustive, on en déduit qu'elle est minimale.

Le modèle n'est pas régulier pour plusieurs raisons : notons simplement que le domaine où $\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\lambda_{\mathbb{R}^n}}(x) > 0$ dépend de θ , et que cette densité n'est pas dérivable par rapport à θ sur tout \mathbb{R} .

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note la vraisemblance

$$L(\theta, x) = \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\lambda_{\mathbb{R}^n}}(x) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i + n\theta} 1_{[\theta, +\infty[}(x_{(1)})$$

On cherche $\hat{\theta}_n(x)$ tel que $L(\hat{\theta}_n, x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} L(\theta, x)$. Or la fonction $\theta \mapsto L(\theta, x)$ est nulle sur $]x_{(1)}, +\infty[$, et à l'évidence croissante sur $] -\infty, x_{(1)}]$. Son maximum est donc atteint en $\theta = x_{(1)}$. On a donc $L(x_{(1)}, x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} L(\theta, x)$, autrement dit $\hat{\theta}_n = X_{(1)}$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Calculons $\mathbb{P}_\theta (|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon)$:

$$\mathbb{P}_\theta (|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}_\theta (X_{(1)} - \theta > \varepsilon) = e^{-n\varepsilon}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_\theta \left(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\varepsilon} = \frac{e^{-\varepsilon}}{1 - e^{-\varepsilon}} < +\infty$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que $\hat{\theta}_n$ converge \mathbb{P}_θ -p.s. vers θ quand n tend vers l'infini, i.e. $(\hat{\theta}_n, n \geq 1)$ est une suite d'estimateurs de θ fortement consistante.

De plus, $\mathbb{P}_\theta \left(n(\hat{\theta}_n - \theta) > u \right) = e^{-u}$, ce qui signifie que $n(\hat{\theta}_n - \theta)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. On en déduit que $n(\hat{\theta}_n - \theta)$ converge (!) en loi quand n tend vers l'infini vers une loi exponentielle de paramètre 1, donc que $\hat{\theta}_n$ converge en loi vers θ à une vitesse d'ordre n .

3.

$$\mathbb{E}_\theta \left[\hat{\theta}_n \right] = \int_\theta^{+\infty} u n e^{n\theta - nu} du = \theta + \int_0^{+\infty} u n e^{-nu} du = \theta + \frac{1}{n}$$

Donc $\hat{\theta}_n - \frac{1}{n} = X_{(1)} - \frac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de θ , qui est fonction d'une statistique exhaustive et complète. D'après le corollaire du théorème de Lehmann-Scheffé, c'est l'estimateur UVMB de θ .

Ex 3.

1. (a) Il y a C_{49}^6 combinaisons possibles de 6 chiffres parmi 49, toutes équiprobables lors du tirage. Une seule donne droit au gros lot. La probabilité de le gagner vaut donc

$$p_6 = \frac{1}{C_{49}^6} = \frac{6!}{49 \times 48 \times \dots \times 44} \simeq 7,15 \cdot 10^{-8}$$

- (b) Si chaque pari a probabilité p_6 de gagner, et que les paris sont indépendants, alors le nombre de paris gagnants du gros lot est la somme de N variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_6 , et indépendantes. Le nombre de gagnants suit donc une loi binômiale $\mathcal{B}(N, p_6)$. Or N est très grand, et Np_6 est de l'ordre de quelques unités. On est donc dans la situation où la loi binômiale peut être approchée par une loi de Poisson. Rappelons qu'en effet

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{B}(N, p_N) = \mathcal{P}(\theta)$$

si $\lim_{N \rightarrow +\infty} Np_N = \theta$. On modélise donc le nombre de gagnants à chaque tirage par une loi de Poisson $\mathcal{P}(Np_6)$.

- (c) Les observations sont entières, indépendantes, et suivent des lois de Poisson. Le paramètre N est entier. On considère donc le modèle statistique suivant

$$(\Omega = \mathbb{N}^2, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2), \{\mathbb{P}_N, N \in \Theta = \mathbb{N}\})$$

avec

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}_N(\{x\}) &= e^{-Np_6} \frac{(Np_6)^{x_1}}{x_1!} e^{-Np_6} \frac{(Np_6)^{x_2}}{x_2!} \\ &= \exp(Q(N)T(x) - \varphi(N)) h(x) \end{aligned}$$

où $Q(N) = \ln(Np_6)$, $T(x) = x_1 + x_2$, $\varphi(N) = 2Np_6$ et $h(x) = (x_1!x_2!)^{-1}$. Il s'agit donc d'un modèle exponentiel, et $T(X)$ en constitue une statistique exhaustive.

Que N fut le paramètre n'a été trouvé par personne...

Remarque. Curieusement, on peut noter que $T(X)$ n'est pas une statistique complète. En effet, si on définit f par $f(2p) = 0$ et $f(2p+1) = (-1)^p \left(\frac{\pi}{p_6}\right)^{2p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors,

- $f(T(X))$ n'est pas nulle presque sûrement.
- $\forall N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_N [|f(T(X))|] < +\infty$.
- $\forall N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_N [f(T(X))] = \sin(2\pi N) = 0$.

On peut même montrer que $T(X)$ n'est pas un estimateur UVMB de son espérance : il suffit de considérer $T(X) + \varepsilon f(T(X))$ pour des ε proches de 0 pour élaborer un contre-exemple. Mais on pourrait néanmoins montrer que $T(X)$ est une statistique minimale.

On observe que $N = \frac{1}{p_6} \mathbb{E}_N [X_1]$. On en déduit l'estimateur de N par la méthode des moments en remplaçant l'espérance par l'espérance empirique :

$$\frac{1}{p_6} \frac{1}{2} (X_1 + X_2).$$

On observe aussi que $N = \frac{1}{p_6} \text{var}_N(X_1) = \frac{1}{p_6} (\mathbb{E}_N[X_1^2] - \mathbb{E}_N[X_1]^2)$. On en déduit l'estimateur de N par la méthode des moments :

$$\frac{1}{p_6} \left(\frac{1}{2} (X_1^2 + X_2^2) - \left(\frac{1}{2} (X_1 + X_2) \right)^2 \right)$$

- (d) On considère le premier des deux estimateurs précédents, à savoir $T(X)/(2p_6)$. C'est un estimateur sans biais. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_N \left(\left| \frac{T(X)}{2p_6} - N \right| > \varepsilon \right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{var}_N \left(\frac{T(X)}{2p_6} \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{4p_6^2} \text{var}_N(T(X)) \\ &= \frac{1}{4p_6^2 \varepsilon^2} (2Np_6) = \frac{N}{2p_6 \varepsilon^2} \end{aligned}$$

car $T(X)$ suit sous \mathbb{P}_N une loi de Poisson de paramètre $2Np_6$, de variance $2Np_6$. D'où

$$\mathbb{P}_N \left(\left| \frac{T(X)}{2p_6} - N \right| > \varepsilon \sqrt{\frac{N}{2p_6}} \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$$

ou encore

$$\mathbb{P}_N \left(\left| \frac{T(X)}{2p_6} - N \right| \leq \varepsilon \sqrt{\frac{N}{2p_6}} \right) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Or

$$\left| \frac{T(X)}{2p_6} - N \right| \leq \varepsilon \sqrt{\frac{N}{2p_6}} \iff \left(\frac{T(X)}{2p_6} - N \right)^2 \leq \varepsilon^2 \frac{N}{2p_6} \iff P(N) \leq 0$$

avec

$$P(u) = u^2 - \frac{u}{2p_6} (2T(X) + \varepsilon^2) + \left(\frac{T(X)}{2p_6} \right)^2$$

Les racines de ce polynôme sont

$$\begin{aligned} r_{\pm}(X) &= \frac{1}{4p_6} \left(2T(X) + \varepsilon^2 \pm \sqrt{(2T(X) + \varepsilon^2)^2 - 4T(X)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4p_6} \left(2T(X) + \varepsilon^2 \pm \sqrt{4T(X)\varepsilon^2 + \varepsilon^4} \right) \end{aligned}$$

On a donc $P(u) \leq 0 \iff u \in [r_-(X), r_+(X)]$. En choisissant $1/\varepsilon^2 = \alpha$, on obtient ainsi un intervalle de confiance de seuil $1 - \alpha$: pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_N \left(N \in \left[\frac{1}{4p_6} \left(2T(X) + \frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{4T(X)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}} \right), \frac{1}{4p_6} \left(2T(X) + \frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{4T(X)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}} \right) \right] \right) \geq 1 - \alpha$$

2. (a) On suppose désormais que N est aléatoire, et on le modélise par une gaussienne dont il s'agit de déterminer la moyenne μ et la variance σ^2 . On note \mathbb{P} la loi de (X_1, X_2, N) . La loi conditionnelle de (X_1, X_2) sachant N est \mathbb{P}_N . Dans ce cas, la moyenne du nombre de gagnants est

$$m = \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1|N]] = \mathbb{E}[Np_6] = \mu p_6$$

On suppose donc $\mu = m/p_6$. De plus,

$$\begin{aligned} s^2 = \text{var}(X_1) &= \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1^2|N]] - \mathbb{E}[Np_6]^2 \\ &= \mathbb{E}[Np_6 + (Np_6)^2] - \mathbb{E}[Np_6]^2 \\ &= \mathbb{E}[Np_6] + \text{var}(Np_6) = m + \sigma^2 p_6^2 \end{aligned}$$

On suppose donc $\sigma^2 = (s^2 - m)/p_6^2$.

- (b) Déterminons la loi a posteriori de N , autrement dit la loi conditionnelle de N sachant $(X_1, X_2) = (x_1, x_2)$. Cette loi a pour densité par rapport à la gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} q_{x_1, x_2}(N) &= \frac{\mathbb{P}_N(\{(x_1, x_2)\})}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}_N(\{(x_1, x_2)\}) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(N - \mu)^2\right) dN} \\ &= \frac{N^{x_1+x_2} e^{-2Np_6}}{\int_{-\infty}^{+\infty} N^{x_1+x_2} e^{-2Np_6} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(N - \mu)^2\right) dN} \end{aligned}$$

L'estimateur bayésien de N est donc

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} N q_{x_1, x_2}(N) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(N - \mu)^2\right) dN \\
 = & \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} N^{x_1+x_2+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(N - \mu + 2p_6\sigma^2)^2\right) dN}{\int_{-\infty}^{+\infty} N^{x_1+x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(N - \mu + 2p_6\sigma^2)^2\right) dN} \\
 = & \frac{\mathbb{E}[Z^{x_1+x_2+1}]}{\mathbb{E}[Z^{x_1+x_2}]}
 \end{aligned}$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(\mu - 2p_6\sigma^2, \sigma^2)$.