Université René Descartes

UFR de Mathématiques et Informatique

EXAMEN DE STATISTIQUE

MAITRISE de MATHEMATIQUES et MAITRISE MASS

1re Session - Année 2003-2004

14 Janvier 2003- 9h-12h

Le sujet comporte 2 pages.

Aucun document autre que le polycopi du cours ou les tables statistiques n'est autoris.

Exercice 1

Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un n-chantillon de variables alatoires de loi normale d'esprance nulle et de variance inconnue $\theta > 0$.

1. Prciser le modle statistique associ et justifier qu'il est exponentiel et rgulier.
2. On veut estimer $\sqrt{\theta}$.
   (a) Calculer l'information de Fisher du modle statistique considr. Quelle serait la variance d'un estimateur efficace de $\sqrt{\theta}$? (On rappelle que, si Z est une variable alatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $Var(Z^2) = 2$)
   (b) On considre l'estimateur $S_n = \sqrt{\frac{\Pi}{2}} \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} |X_k|}{n}$.
   Montrer que S_n est un estimateur sans biais de $\sqrt{\theta}$. Est-il efficace ?
   Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'estimateurs de $\sqrt{\theta}$ asymptotiquement normale et donner la variance de la loi limite.

(c) Dterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ; en dduire l'estimateur du maximun de vraisemblance de $\sqrt{\theta}$ que l'on notera T_n.

(d) Justifier que $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2)_{n\geq 1}$ est une suite d'estimateurs de θ asymptotiquement normale.
En dduire que $(T_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'estimateurs de $\sqrt{\theta}$ asymptotiquement normale, donner la variance de la loi limite et la comparer celle de la question (b).
Sur la base de cette comparaison, vaut-il mieux estimer $\sqrt{\theta}$ par S_n ou par T_n ?

(e) On suppose que n est "grand", proposer un intervalle de confiance pour l'estimation de $\sqrt{\theta}$, au niveau $1-\alpha$, en fonction de T_n.

Exercice 2

1. On considre la loi de Fisher p,p degrs de libert qui admet la densit, par rapport la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = C(p)\,\frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p}$$

avec $C(p) = \dfrac{\Gamma(p)}{(\Gamma(\frac{p}{2}))^2}$.

On observe une variable alatoire relle Z dont la loi admet la densit, par rapport la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$f_\theta(z) = \frac{1}{\theta} f(\frac{z}{\theta})$$

o θ est un paramtre inconnu rel strictement positif.

(a) Montrer que la famille des densits $(f_\theta)_{\theta>0}$ est rapport de vraisemblance croissant en la statistique Z.

(b) Justifier qu'il existe un test UPP pour tester l'hypothse H_0 : $\theta \leq 1$ contre l'hypothse $H_1 : \theta > 1$ au seuil α donn.
Dterminer la rgion critique dans le cas o $p = 24$, $\alpha = 0,05$.

2. On observe $X_1, X_2, \cdots, X_n, X'_1, \cdots, X'_n$ des variables alatoires indpendantes telles que pour $k = 1, 2, \cdots, n$, la loi de X_k est la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et celle de X'_k est la loi $\mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$ o μ , μ' , σ^2 , σ'^2 sont des paramtres rels inconnus.

On note S^2 et S'^2 les variances empiriques corriges des chantillons $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ et$(X'_1, X'_1, \cdots, X'_n)$ respectivement.

(a) Donner la loi de $\dfrac{S^2/\sigma^2}{S'^2/\sigma'^2}$.

(b) Justifier que si l'on pose $\theta = \dfrac{\sigma^2}{\sigma'^2}$, la loi de $T = \dfrac{S^2}{S'^2}$ admet la densit f_θ pour une valeur de p que l'on donnera.

(c) Dduire de ce qui prcde un test UPP parmi les tests fonds sur l'observation de T de l'hypothse $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma'^2$ contre l'hypothse $H_1 : \sigma^2 > \sigma'^2$ au seuil α donn.
Que conclut-on si n=25, si la valeur observe de S^2 est 3,3 et celle de S'^2 est 1,5, au seuil $\alpha = 0,05$, puis au seuil $\alpha = 0,01$?