Université Paris 5 - René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Corrigé du partiel du 26 mars 2001
Statistique des processus
MST ISASH - Maîtrise MASS

Exercice 1. *Exercice bien réussi, noté sur 4 points.*

1) Montrons que ϕ annule les composantes saisonnières.
Méthode 1. On remarque que la transformée en z de ϕ peut se décomposer en

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{1}{3}(2+z+z^2-z^3)\\ &= (1+z+z^2)\times\frac{2-z}{3}\end{aligned}$$

Autrement dit, $(1+z+z^2)$ divise $\phi(z)$. Or, si $(1+z+\cdots+z^{q-1})$ divise la transformée en z d'une moyenne mobile finie, cette moyenne mobile finie annule les composantes saisonnières de période q. On en déduit que ϕ annule les saisonnalités de période 3.

Méthode 2. Soit x^σ une composante saisonnière de période 3 ; x^σ vérifie donc les propriétés suivantes : $\forall t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}x_t^\sigma + x_{t-1}^\sigma + x_{t-2}^\sigma &= 0\\ x_t^\sigma &= x_{t-3}^\sigma\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\phi(x^\sigma)_t &= \frac{1}{3}(2x_t^\sigma + x_{t-1}^\sigma + x_{t-2}^\sigma - x_{t-3}^\sigma)\\ &= \frac{1}{3}\big((2x_t^\sigma - x_{t-3}^\sigma) + x_{t-1}^\sigma + x_{t-2}^\sigma\big)\\ &= \frac{1}{3}(x_t^\sigma + x_{t-1}^\sigma + x_{t-2}^\sigma)\\ &= 0\end{aligned}$$

2) Montrons que ϕ conserve les tendances affines.

Méthode 1. Il suffit de vérifier que $(1-z)^2$ divise $\phi(z)-1$, autrement dit que 1 en est racine double, ce qui revient à vérifier que $\big(\phi(z)-1\big)|_{z=1} = \big(\phi(z)-1\big)'|_{z=1} = 0$. Or,

$$\begin{aligned}\big(\phi(z)-1\big)|_{z=1} &= \big(\frac{1}{3}(2+z+z^2-z^3)-1\big)|_{z=1}\\ &= \frac{1}{3}(2+1+1-1)-1\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\phi(z)-1\big)'|_{z=1} &= \big(\frac{1}{3}(1+2z-3z^2)\big)|_{z=1}\\ &= \frac{1}{3}(1+2-3)\\ &= 0\end{aligned}$$

Méthode 1 bis. On peut aussi effectuer directement la division, par puissances croissantes ou décroissantes, de $\phi(z) - 1$ par $(1-z)^2$, et l'on trouve ainsi que

$$\phi(z) - 1 = (1-z)^2 \frac{z+1}{3}$$

Méthode 2. Soit $x_t = \alpha + \beta t$ une tendance polynômiale quelconque de degré inférieur à 2. Montrons que $\phi(x)_t = x_t$:

$$\begin{aligned}
\phi(x)_t &= \frac{1}{3}(2x_t + x_{t-1} + x_{t-2} - x_{t-3}) \\
&= \frac{1}{3}\Big(2\big(\alpha + \beta t\big) + \big(\alpha + \beta(t-1)\big) + \big(\alpha + \beta(t-2)\big) - \big(\alpha + \beta(t-3)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{3}(\alpha(2+1+1-1) + \beta(-1-2+3) + \beta t(2+1+1-1) \\
&= \frac{1}{3}(3\alpha + 3\beta t) \\
&= x_t
\end{aligned}$$

Remarque : la somme des coefficients du filtre $\sum_{u=0}^{4} \phi_u = \frac{1}{3}(2+1+1-1)$ étant égale à 1, on en déduit que le filtre ϕ conserve les constantes (Attention : comme le filtre n'est pas symétrique, cela n'implique pas qu'il conserve les tendances affines). En posant $y_t = \beta t$, on peut alors simplifier les calculs précédents en écrivant

$$\phi(x)_t = \phi(\alpha + y)_t = \phi(\alpha)_t + \phi(y)_t = \alpha + \phi(y)_t,$$

et ne reste plus alors à montrer que $\phi(y)_t = y_t$.

Exercice 2. *Cet exercice, extrait des fiches de TD, a montré les difficultés très importantes des étudiants à manipuler correctement les indices dans des sommations. Noté sur 5 points.*

1) La démonstration de la formule, vue en cours, consiste simplement en une

suite de calculs :

$$\begin{aligned}
\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{|t|\le N-1}\hat{\gamma}_\varepsilon^{(N)}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|t|\le N-1}\Big(\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N-|t|}\varepsilon_u\varepsilon_{u+|t|}\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}\varepsilon_u^2\Big) + 2\frac{1}{2\pi}\sum_{t=1}^{N-1}\Big(\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N-|t|}\varepsilon_u\varepsilon_{u+t}\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi N}\Big(\sum_{\substack{1\le u,v\le N\\ u=v}}\varepsilon_u\varepsilon_v\Big) + \frac{2}{2\pi N}\sum_{t=1}^{N-1}\Big(\sum_{\substack{1\le u,v\le N\\ v-u=t}}\varepsilon_u\varepsilon_v\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi N}\Big(\sum_{\substack{1\le u,v\le N\\ u=v}}\varepsilon_u\varepsilon_v\Big) + 2\frac{1}{2\pi N}\Big(\sum_{\substack{1\le u,v\le N\\ u<v}}\varepsilon_u\varepsilon_v\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi N}\Big(\sum_{\substack{1\le u,v\le N\\ u=v}}\varepsilon_u\varepsilon_v\Big) + \frac{1}{2\pi N}\Big(\sum_{\substack{1\le u,v\le N\\ u\ne v}}\varepsilon_u\varepsilon_v\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi N}\sum_{1\le u,v\le N}\varepsilon_u\varepsilon_v = \frac{1}{2\pi N}\Big(\sum_{1\le u\le N}\varepsilon_u\Big)\Big(\sum_{1\le v\le N}\varepsilon_v\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi N}\Big(\sum_{1\le u\le N}\varepsilon_u\Big)^2
\end{aligned}$$

2) La loi de $\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t$ est la loi d'une somme de gaussiennes centrées indépendantes ; c'est donc une gaussienne centrée de variance la somme des variances, ici égale à N. Donc, si l'on note $U = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t$, alors U est une gaussienne centrée de variance $\frac{1}{2\pi}$. Ce dont on déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0)\right] &= \mathbb{E}[U^2] = \operatorname{var}(U) = \frac{1}{2\pi}\\
\operatorname{var}\left(\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0)\right) &= \mathbb{E}[\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0)^2] - \mathbb{E}[\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0)]^2\\
&= \mathbb{E}[U^4] - \mathbb{E}[U^2]^2 = 3\frac{1}{(2\pi)^2} - \big(\frac{1}{2\pi}\big)^2 = \frac{2}{4\pi^2}
\end{aligned}$$

3) La densité spectrale de ε vaut $f_\varepsilon(\lambda) = \frac{\operatorname{var}(\varepsilon_t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$. On voit donc que $\mathbb{E}\left[\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0)\right] = f_\varepsilon(0)$, et que l'estimateur $\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0)$ est sans biais. On remarque par ailleurs que cet estimateur n'est pas convergent en moyenne quadratique, car sa variance ne tend pas vers 0 quand N tend vers l'infini. En fait, $2\pi\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0)$ suit une loi du χ_2 à un degré de liberté, quel que soit N.

Exercice 3. *Exercice classique, assez correctement réussi et noté sur 7 points. Attention : un ARMA(1,2) n'est ni un AR(1), ni un MA(2), ni les deux à la fois.*

1) Ce processus vérifie le modèle ARMA(1,2) suivant :

$$\phi(B)(X) = \theta(B)(\varepsilon)$$

avec $\phi(B) = I - 0{,}8B$ et $\theta(B) = I + B - 0{,}75B^2$. Ce modèle est causal et inversible si les racines des transformées en z de $\phi(B)$ et $\theta(B)$ sont de module strictement supérieur à 1. Or $\phi(z) = 1 - 0{,}8z$ a pour racine 1,25 ; le modèle est donc causal. Mais $\theta(z) = 1 + z - 0{,}75z^2 = (1 - 0{,}5z)(1 + 1{,}5z)$ a pour racines 2 et $-2/3$; le modèle n'est donc pas inversible.

2) On pose $\varepsilon' = (I + \frac{2}{3}B)^{-1} \circ (I + 1{,}5B)(\varepsilon)$. Vérifions que ε' est bien un bruit blanc faible. Pour cela, on calcule sa densité spectrale :

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon'}(\lambda) &= \left|\frac{1 + 1{,}5e^{i\lambda}}{1 + \frac{2}{3}e^{i\lambda}}\right|^2 f_\varepsilon(\lambda) \\ &= \left|\frac{1}{\frac{2}{3}e^{i\lambda}}\right|^2 \left|\frac{1 + 1{,}5e^{i\lambda}}{1{,}5e^{-i\lambda} + 1}\right|^2 \frac{1}{2\pi} \\ &= \frac{9}{4} \times \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $|e^{i\lambda}| = 1$ et $|1{,}5e^{-i\lambda} + 1| = |1 + 1{,}5e^{i\lambda}|$. La densité spectrale de ε' est donc constante. Ceci implique que ε' est un bruit blanc faible. Sa densité spectrale s'écrit alors $\mathrm{var}(\varepsilon'_t)/2\pi$, ce dont on déduit que la variance de ε'_t vaut $9/4$.

Montrons maintenant que ε' est le bruit blanc d'innovation associé à X : $\forall t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (I - 0{,}8B)(X)_t &= (I - 0{,}5B) \circ (I + 1{,}5B)(\varepsilon)_t \\ &= (I - 0{,}5B) \circ (I + \frac{2}{3}B) \circ (I + \frac{2}{3}B)^{-1} \circ (1 + 1{,}5B)\varepsilon)_t \\ &= (I - 0{,}5B) \circ (I + \frac{2}{3}B)(\varepsilon')_t \\ &= \theta'(B)(\varepsilon')_t \end{aligned}$$

Comme $\theta'(B)$ est un filtre linéaire dont la transformée en z s'annule en 2 et en $-1{,}5$, de module plus grand que 1, on conclut que le modèle ARMA(1,2) $\phi(B)(X) = \theta'(B)(\varepsilon')$ est causal et inversible, et de ce fait que ε' est le bruit blanc d'innovation associé à X.

3) La représentation de Wold de X consiste à exprimer X_t comme somme de la série $\varepsilon'_t + \sum_{u \geq 1} \psi_u {\varepsilon'}_{t-u}$. La variance de ε' étant déjà connue, ne reste qu'à préciser la valeur des coefficients $(\psi_u, u \geq 1)$. Si l'on note $\psi(B) = I + \sum_{u \geq 1} \psi_u B^u$, alors $\psi(B) = \phi(B)^{-1} \circ \theta'(B)$. Sa transformée en z vaut donc :

$$\begin{aligned} \psi(z) &= 1 + \sum_{u \geq 1} \psi_u z^u \\ &= \frac{\theta'(z)}{\phi(z)} \\ &= \frac{(1 - 0{,}5z)(1 + \frac{2}{3}z)}{1 - 0{,}8z} \\ &= \frac{13}{48}\frac{1}{1 - 0{,}8z} + \frac{35}{48} + \frac{5}{12}z \\ &= 1 + \frac{19}{30}z + \sum_{u \geq 2} \frac{13}{48}(0{,}8)^u z^u \end{aligned}$$

Il appert ainsi que

$$
\begin{aligned}
\psi(B) &= I + \frac{19}{30}B + \sum_{u\geq 2} \frac{13}{48}(0{,}8)^u B^u \\
X_t &= \psi(B)(\varepsilon')_t \\
&= I(\varepsilon')_t + \frac{19}{30}B(\varepsilon')_t + \sum_{u\geq 2} \frac{13}{48}(0{,}8)^u B^u(\varepsilon')_t \\
&= \varepsilon'_t + \frac{19}{30}\varepsilon'_{t-1} + \sum_{u\geq 2} \frac{13}{48}(0{,}8)^u \varepsilon'_{t-u}
\end{aligned}
$$

4) La densité spectrale de X vaut

$$
\begin{aligned}
f_X(\lambda) &= \left|\frac{\theta'(\lambda)}{\phi(\lambda)}\right|^2 f_{\varepsilon'}(\lambda) \\
&= \left|\frac{(1-0{,}5e^{i\lambda})(1+\frac{2}{3}e^{i\lambda})}{1-0{,}8e^{i\lambda}}\right|^2 \frac{9}{4}\frac{1}{2\pi} \\
&= \frac{(1-0{,}5e^{i\lambda})(1-0{,}5e^{-i\lambda})(1+\frac{2}{3}e^{i\lambda})(1+\frac{2}{3}e^{-i\lambda})}{(1-0{,}8e^{i\lambda})(1-0{,}8e^{-i\lambda})}\frac{9}{4}\frac{1}{2\pi} \\
&= \frac{(1{,}25-\cos\lambda)(1+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\cos\lambda)}{1{,}64-1{,}6\cos\lambda}\frac{9}{8\pi} \\
&= \frac{(1{,}25-\cos\lambda)(13+4\cos\lambda)}{8\pi(1{,}64-1{,}6\cos\lambda)}
\end{aligned}
$$

où l'on a noté $\theta'(\lambda)$ et $\phi(\lambda)$ les fonctions de transfert associées aux filtres $\theta'(B)$ et $\phi(B)$.

Exercice 4. *Exercice le plus difficile de l'épreuve, noté sur 8 points, personne ne l'a traité en totalité. Là encore, des erreurs ont été presque systématiques dans la manipulation des indices de sommation à la question 2).*

1) Le modèle est causal, comme tout modèle MA(q), car X_t s'exprime comme combinaison linéaire des variables ε_s d'indice s inférieur à t. Il est inversible car $1+\theta z$, la transformée en z du filtre moyenne mobile MA(1) $I+\theta B$, a pour racine $-1/\theta$ de module plus grand que 1. Le modèle caractérisant X en fonction de ε étant causal et inversible, on en déduit que ε est le bruit blanc d'innovation de X ; autrement dit, que $\varepsilon_i = X_i - P^{\perp}_{X_{i-1},X_{i-2},\ldots}(X_i)$. En conséquence, ε_i est décorrélée avec toute variable X_j avec $j<i$, en particulier avec $X_1,\ldots,X_{i-1}$. Comme $\tilde{\varepsilon}_j$ est combinaison affine de $X_1,\ldots,X_j$, on en déduit que ε_i est aussi décorrélé avec $\tilde{\varepsilon}_j$ dès que j est strictement inférieur à i. *Attention : si ε_i et $\tilde{\varepsilon}_i$ sont décorrélées avec X_j pour $j<i$, c'est faux pour $j\geq i$. Bien des erreurs, notamment à la question 3) viennent de la confusion.*

2) La formule demandée a été vue en cours, mais non démontrée. Pour le faire, calculons $\operatorname{cov}(X_i,\tilde{\varepsilon}_{i-j})$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_i,\tilde{\varepsilon}_{i-j}) &= \operatorname{cov}\Big(\tilde{\varepsilon}_i + \sum_{k=1}^{i-1}\psi_{i,k}\tilde{\varepsilon}_{i-k},\tilde{\varepsilon}_{i-j}\Big) \\
&= \operatorname{cov}(\tilde{\varepsilon}_i,\tilde{\varepsilon}_{i-j}) + \sum_{k=1}^{i-1}\psi_{i,k}\ \operatorname{cov}(\tilde{\varepsilon}_{i-k},\tilde{\varepsilon}_{i-j})
\end{aligned}
$$

Or il a été établi en cours que les variables $(\tilde\varepsilon_l, l \geq 1)$ sont décorrélées. On en déduit que dans la somme précédente tous les termes sont nuls sauf celui pour lequel $k = j$. D'où

$$\text{cov}(X_i,\tilde\varepsilon_{i-j}) = \psi_{i,j} \ \text{cov}(\tilde\varepsilon_{i-j},\tilde\varepsilon_{i-j}) = \psi_{i,j}\tilde\sigma^2_{i-j}$$

Il en résulte la formule attendue. Si, de plus, j est supérieur ou égal à 2, alors

$$\begin{aligned}\text{cov}(X_i,\tilde\varepsilon_{i-j}) &= \text{cov}(\varepsilon_i + \theta\varepsilon_{i-1},\tilde\varepsilon_{i-j})\\ &= \text{cov}(\varepsilon_i,\tilde\varepsilon_{i-j}) + \theta \ \text{cov}(\varepsilon_{i-1},\tilde\varepsilon_{i-j})\\ &= 0+0,\end{aligned}$$

car d'après le 1), ε_i et ε_{i-1} sont décorrélés avec $\tilde\varepsilon_{i-j}$. Il s'ensuit que $\psi_{i,j} = 0$ si $j \geq 2$.

3) Les formules de récurrence sont celles qui apparaissent dans l'algorithme des innovations. Pour obtenir la première, on calcule $\text{cov}(X_{i+1},X_i)$:

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= \text{cov}(X_{i+1},X_i)\\ &= \text{cov}(\tilde\varepsilon_{i+1} + \psi_{i+1}\tilde\varepsilon_i,\tilde\varepsilon_i + \psi_i\tilde\varepsilon_{i-1})\\ &= \text{cov}(\tilde\varepsilon_{i+1},\tilde\varepsilon_i) + \psi_i \ \text{cov}(\tilde\varepsilon_{i+1},\tilde\varepsilon_{i-1}) + \psi_{i+1} \ \text{cov}(\tilde\varepsilon_i,\tilde\varepsilon_i) + \psi_{i+1}\psi_i \ \text{cov}(\varepsilon_i\tilde\varepsilon_{i-1})\\ &= \psi_{i+1} \ \text{cov}(\tilde\varepsilon_i,\tilde\varepsilon_i) = \psi_{i+1}\tilde\sigma^2_i\end{aligned}$$

où l'on s'est encore servi du fait que les $(\tilde\varepsilon_k, k \geq 1)$ sont décorrélés. La deuxième formule s'obtient en calculant la variance de X_{i+1} :

$$\gamma_X(0) = \text{var}(X_{i+1}) = \text{var}(\tilde\varepsilon_{i+1}+\psi_{i+1,1}\tilde\varepsilon_i) = \text{var}(\tilde\varepsilon_{i+1})+\psi^2_{i+1,1} \ \text{var}(\tilde\varepsilon_i) = \tilde\sigma^2_{i+1}+\psi^2_{i+1,1}\tilde\sigma^2_i$$

D'où le résultat.

Montrons maintenant les formules explicites données pour $\psi_{i,1}$ et $\tilde\sigma^2_i$ par induction. Posons comme hypothèse de récurrence :

H(i) :

$$\begin{aligned}\psi_{j,1} &= \theta\frac{1-\theta^{2(j-1)}}{1-\theta^{2j}} \quad \forall j = 2,\ldots,i\\ \tilde\sigma^2_j &= \sigma^2_\varepsilon\frac{1-\theta^{2(j+1)}}{1-\theta^{2j}} \quad \forall j = 1,\ldots,i\end{aligned}$$

Montrons que H(1) est vraie : il suffit pour cela de vérifier que

$$\tilde\sigma^2_1 = \sigma^2_\varepsilon\frac{1-\theta^4}{1-\theta^2}$$

Or, en effet :

$$\tilde\sigma^2_1 = \text{var}(\tilde\varepsilon_1) = \text{var}(X_1) = \text{var}(\varepsilon_1 + \theta\varepsilon_0) = \sigma^2_\varepsilon(1+\theta^2)$$

$$\sigma^2_\varepsilon\frac{1-\theta^{2(i+1)}}{1-\theta^{2i}}\Big|_{i=1} = \sigma^2_\varepsilon\frac{1-\theta^4}{1-\theta^2} = \sigma^2_\varepsilon\frac{(1-\theta^2)(1+\theta^2)}{1-\theta^2} = \sigma^2_\varepsilon(1+\theta^2)$$

Montrons ensuite que H$(i)\Longrightarrow$H$(i+1)$ pour tout $i \geq 1$. Supposons H(i) vraie. Alors, d'après les formules de récurrence établies précédemment, et sachant que

$$\gamma_X(1) = \text{cov}(X_1,X_0) = \text{cov}(\varepsilon_1 + \theta\varepsilon_0,\varepsilon_0 + \theta\varepsilon_{-1}) = \theta \ \text{cov}(\varepsilon_0,\varepsilon_0) = \theta\sigma^2_\varepsilon,$$

on a

$$
\begin{aligned}
\psi_{i+1,1} &= \frac{\gamma_X(1)}{\tilde{\sigma}_i^2} \\
&= \frac{\theta\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 \frac{1-\theta^{2(i+1)}}{1-\theta^{2i}}} \\
&= \theta \frac{1-\theta^{2i}}{1-\theta^{2(i+1)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{i+1}^2 &= \gamma_X(0) - \psi_{i+1,1}^2 \tilde{\sigma}_i^2 \\
&= \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2) - \left(\theta \frac{1-\theta^{2i}}{1-\theta^{2(i+1)}}\right)^2 \sigma_\varepsilon^2 \frac{1-\theta^{2(i+1)}}{1-\theta^{2i}} \\
&= \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2) - \sigma_\varepsilon^2\theta^2 \frac{1-\theta^{2i}}{1-\theta^{2(i+1)}} \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\theta^2)(1-\theta^{2(i+1)}) - \theta^2(1-\theta^{2i})}{1-\theta^{2(i+1)}} \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \frac{1-\theta^{2(i+2)}}{1-\theta^{2(i+1)}}
\end{aligned}
$$

Ceci montre que H$(i+1)$ est vraie. On en déduit que H(n) est vraie quel que soit $n \geq 1$. Ce qui démontre les formules demandées.

4) Comme θ est de module strictement plus petit que 1, la limite de θ^i vaut 0 quand i tend vers l'infini. D'où

$$
\begin{aligned}
\lim_{i\to+\infty} \tilde{\sigma}_i^2 &= \sigma_\varepsilon^2 \\
\lim_{i\to+\infty} \psi_{i,1} &= \theta \\
\lim_{i\to+\infty} \psi_{i,k} &= \lim_{i\to+\infty} 0 = 0 \quad \forall k \geq 2
\end{aligned}
$$

On en conclut que l'algorithme des innovations permet bien de retrouver les coefficients de la décomposition de Wold de X.