

MST ISASH 2ème année

Maîtrise MASS

Partiel du 26 mars 2001

16h15 - 18h45

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Le sujet comporte deux pages.

B désigne l'opérateur retard $B(x)_t = x_{t-1}$, et l'on note

$$B^p \equiv B^{\circ p} = \underbrace{B \circ B \circ \dots \circ B}_{p \text{ fois}}$$

On rappelle par ailleurs que si U est une gaussienne centrée de variance σ^2 , alors $\mathbb{E}[U^4] = 3\sigma^4$.

Ex 1. On considère le filtre $\phi = \frac{1}{3}(2I + B + B^2 - B^3)$. Montrer que ϕ conserve les tendances affines et annule (ou arrête) les composantes saisonnières de période 3.

Ex 2. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc gaussien de variance 1. On définit les estimateurs empiriques de la fonction d'autocovariance et de la densité spectrale par

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_\varepsilon^{(N)}(t) &= \frac{1}{N} \sum_{u=1}^{N-|t|} \varepsilon_u \varepsilon_{u+|t|} \\ \hat{f}_\varepsilon^{(N)}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|t| \leq N-1} \hat{\gamma}_\varepsilon^{(N)}(t) e^{-it\lambda} \end{aligned}$$

1) Montrer que

$$\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0) = \frac{1}{2\pi N} \left(\sum_{t=1}^N \varepsilon_t \right)^2$$

2) En déduire que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0) \right] &= \frac{1}{2\pi} \\ \text{var} \left(\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0) \right) &= \frac{2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Indication : quelle est la loi de $\sum_{t=1}^N \varepsilon_t$?

3) Quelles propriétés de l'estimateur $\hat{f}_\varepsilon^{(N)}(0)$ peut-on en déduire ?

Ex 3. Soit X un processus faiblement stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = 0,8X_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} - 0,75\varepsilon_{t-2}$$

avec ε bruit blanc faible de variance 1.

- 1) De quel type de processus s'agit-il? Le modèle donné est-il causal et inversible?
- 2) Calculer le bruit blanc d'innovation associé à X en fonction de ε .
- 3) Déterminer la représentation de Wold de X .
- 4) Calculer la densité spectrale de X (à exprimer en termes de fonctions réelles).

Ex 4. Le but de cet exercice est de retrouver dans un cas simple les propriétés asymptotiques de l'algorithme des innovations. Les questions peuvent être résolues en admettant les résultats des questions antérieures.

Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus MA(1), vérifiant $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, avec ε bruit blanc de variance σ_ε^2 , et $|\theta| < 1$. On note $P_{V^2(X_1, \dots, X_{i-1})}^\perp(X_i)$ le prédicteur de X_i au sens des moindres carrés sur l'espace affine engendré par X_1, \dots, X_{i-1} , et on définit $\tilde{\varepsilon}_i = X_i - P_{V^2(X_1, \dots, X_{i-1})}^\perp(X_i)$. On pose $\tilde{\sigma}_i^2 = \text{var}(\tilde{\varepsilon}_i)$.

1) Montrer que ε est le bruit blanc d'innovation associé à X . En déduire que ε_i est décorrélé avec X_1, \dots, X_{i-1} , ainsi qu'avec $\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_{i-1}$.

2) Soient $(\psi_{i,j})_{1 \leq j < i < +\infty}$ tels que

$$X_i = \tilde{\varepsilon}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{i,j} \tilde{\varepsilon}_{i-j}.$$

Montrer que

$$\psi_{i,j} = \frac{\text{cov}(X_i, \tilde{\varepsilon}_{i-j})}{\tilde{\sigma}_{i-j}^2},$$

et déduire du 1) que $\psi_{i,j} = 0$ si $j \geq 2$.

3) Sachant, d'après le 2), que $X_i = \tilde{\varepsilon}_i + \psi_{i,1} \tilde{\varepsilon}_{i-1}$, montrer que $(\psi_{i,1}, i \geq 1)$ et $(\tilde{\sigma}_i^2, i \geq 1)$ vérifient la récurrence $\forall i \geq 1$

$$\begin{aligned} \psi_{i+1,1} &= \frac{\gamma_X(1)}{\tilde{\sigma}_i^2} \\ \tilde{\sigma}_{i+1}^2 &= \gamma_X(0) - \psi_{i+1,1}^2 \tilde{\sigma}_i^2 \end{aligned}$$

En déduire que

$$\begin{aligned} \psi_{i+1,1} &= \theta \frac{1 - \theta^{2i}}{1 - \theta^{2(i+1)}} \\ \tilde{\sigma}_i^2 &= \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 - \theta^{2(i+1)}}{1 - \theta^{2i}} \end{aligned}$$

4) Conclure.