Université Paris 5 - René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Maîtrise MASS

Corrigé du partiel du 2 avril 2002

Question de cours : Le système d'équations de Yule-Walker est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \rho_X(q) & \rho_X(q-1) & \dots & \rho_X(q-p+1) \\ \rho_X(q+1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \rho_X(q-1) \\ \rho_X(q+p-1) & \dots & \rho_X(q+1) & \rho_X(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\phi_1 \\ \vdots \\ -\phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_X(q+1) \\ \vdots \\ \rho_X(q+p) \end{pmatrix}$$

Ex 1.

1. D'après un théorème du cours, si $\phi(B)$ arrête les saisonnalités de période 5, alors il existe une moyenne mobile $\psi(B)$ telle que

$$\phi(B) = \psi(B) \circ (I + B + B^2 + B^3 + B^4).$$

Posons $\tilde{\psi}(B) = 5\psi(B) \circ B^2$. Alors $\psi(B) = \tilde{\psi}(B) \circ \frac{1}{5}F^2$, et

$$\phi(B) = \tilde{\psi}(B) \circ \frac{1}{5}F^2 \circ (I+B+B^2+B^3+B^4) = \tilde{\psi}(B) \circ \frac{1}{5}(F^2+F+I+B+B^2).$$

Soient p, q tels que $\tilde{\psi}(B) = \sum_{u=-q}^{p} \tilde{\psi}_u B^u$, avec $\tilde{\psi}_{-q}, \tilde{\psi}_p \neq 0$. Avec ces notations,

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \tilde{\psi}(z) \times \frac{1}{5}\left(z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\tilde{\psi}_{-q} z^{-q-2} + \left(\tilde{\psi}_{-q} + \tilde{\psi}_{-q+1}\right) z^{-q-1} + \dots + \psi_p z^{p+2}\right) \end{aligned}$$

Comme les puissances extrêmes de z dans $\phi(z)$ sont au plus -3 et 3, cela impose $q \leq 1$ et $p \leq 1$. On en déduit que $\phi(B)$ peut s'écrire

$$\phi(B) = \left(\tilde{\psi}_{-1}F + \tilde{\psi}_0 I + \tilde{\psi}_1 B\right) \circ \frac{1}{5}\left(F^2 + F + I + B + B^2\right),$$

ce qui est la forme demandée. Il faut aussi que $\phi(B)$ conserve les tendances affines. Soit $x = (x_t = a + bt, t \in \mathbb{Z})$ une tendance affine quelconque. La moyenne mobile $\frac{1}{5}\left(F^2 + F + I + B + B^2\right)$ est symétrique et la somme de ses coefficients est égale à 1. Elle conserve donc les tendances affines. Il s'ensuit que

$$\phi(B)(x) = \left(\tilde{\psi}_{-1}F + \tilde{\psi}_0 I + \tilde{\psi}_1 B\right)(x)$$

Or $\left(\tilde{\psi}_{-1}F + \tilde{\psi}_0 I + \tilde{\psi}_1 B\right)$ conserve les tendances affines si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{i=-1}^{1} \tilde{\psi}_i &= 1 \\ \sum_{i=-1}^{1} i\tilde{\psi}_i &= 0 \end{aligned}$$

i.e. $\tilde{\psi}_{-1} = \tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi}_0 = 1 - 2\tilde{\psi}_{-1}$.
En résumé, on a montré que $\phi(B)$ annule les composantes saisonnières de période 5 et conserve les tendances affines si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\phi(B) = (\alpha F + (1-2\alpha)I + \alpha B) \circ \frac{1}{5}\left(F^2 + F + I + B + B^2\right)$$

2. Le rapport de variance résiduelle de $\phi(B)$ est égal à $\sum_{i=-3}^{3} \phi_i^2$. On déduit de ce qui précède la valeur des ϕ_i en fonction de α :

$$\phi(z) = \frac{1}{5}\left(\alpha z^{-3} + (1-\alpha)z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + (1-\alpha)z^2 + \alpha z^3\right)$$

i.e.

$$\phi_{-3} = \phi_3 = \alpha, \quad \phi_{-2} = \phi_2 = 1-\alpha, \quad \phi_{-1} = \phi_0 = \phi_1 = 1.$$

Le rapport de variance résiduelle est donc égal à

$$\frac{1}{25}\left(3 + 2\alpha^2 + 2\left(1-\alpha\right)^2\right) = \frac{1}{25}\left(4 + \left(1-2\alpha\right)^2\right)$$

Il est minimal pour $\alpha = 1/2$. La moyenne mobile qui minimise le rapport de variance résiduelle est

$$\phi^*(B) = \frac{1}{10}F^3 + \frac{1}{10}F^2 + \frac{1}{5}F + \frac{1}{5}I + \frac{1}{5}B + \frac{1}{10}B^2 + \frac{1}{10}B^3$$

Ex 2.

1. On vérifie aisément par récurrence que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad Y_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \cdots + \phi^{t-1}\varepsilon_1 = \sum_{u=0}^{t-1} \phi^u \varepsilon_{t-u} \tag{1}$$

Les variables $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ sont décorrélées et de même variance car ε est un bruit blanc faible. Il en résulte

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{var}\,(Y_t) = \sum_{u=0}^{t-1} \phi^{2u}\,\mathrm{var}\,(\varepsilon_{t-u}) = \sigma^2 \sum_{u=0}^{t-1} \phi^{2u}$$

2. Soit $t \geq 0$ quelconque. Quel que soit $s = 1, \ldots, t$, ε_s est une combinaison linéaire de Y_s et Y_{s-1}, et appartient donc à $V^2(Y_s, 0 \leq s \leq t)$. On en déduit l'inclusion de $V^2(\varepsilon_s, 1 \leq s \leq t)$ dans $V^2(Y_s, 0 \leq s \leq t)$. De même, on déduit de (1) l'inclusion opposée $V^2(Y_s, 0 \leq s \leq t) \subset V^2(\varepsilon_s, 1 \leq s \leq t)$. Les deux sous-espaces de Hilbert $V^2(Y_s, 0 \leq s \leq t)$ et $V^2(\varepsilon_s, 1 \leq s \leq t)$ sont donc égaux quel que soit t.
Calculons maintenant $P^{\perp}_{V^2(Y_s, 0 \leq s < t)}(Y_t)$ pour tout $t \geq 1$ quelconque :

$$\begin{aligned}
P^{\perp}_{V^2(Y_s,0\leq s<t)}(Y_t) &= P^{\perp}_{V^2(Y_s,0\leq s<t)}(\varepsilon_t) + P^{\perp}_{V^2(Y_s,0\leq s<t)}(Y_{t-1}) \\
&= P^{\perp}_{V^2(Y_s,0\leq s<t)}(\varepsilon_t) + Y_{t-1} \text{ car } Y_{t-1} \in V^2(Y_s, 0 \leq s < t) \\
&= P^{\perp}_{V^2(\varepsilon_s,1\leq s<t)}(\varepsilon_t) + Y_{t-1} \\
&= 0 + Y_{t-1} \text{ car } \varepsilon_t \perp \varepsilon_s \quad \forall s = 1, \ldots, t-1
\end{aligned}$$

Il en résulte que $Y_t - P^{\perp}_{V^2(Y_s, 0\leq s<t)}(Y_t)$ est égal à $Y_t - Y_{t-1}$, autrement dit à ε_t quel que soit $t \geq 1$. Le bruit blanc ε est bien le processus d'innovation de Y, pour toute valeur de ϕ.

3. Si $|\phi|$ est plus grand ou égal à 1, alors la variance de Y_t tend vers l'infini quand t tend lui-même vers l'infini. Une condition nécessaire pour que le processus Y soit asymptotiquement stationnaire est donc $|\phi| < 1$. Si tel est le cas, considérons le filtre

$$\psi(B) = \sum_{u=0}^{+\infty} \phi^u B^u$$

Il est clair qu'il s'agit bien d'un filtre linéaire car

$$\|\psi\|_1 = \sum_{u=0}^{+\infty} |\phi^u| = \frac{1}{1-|\phi|} < +\infty.$$

On peut donc définir le processus faiblement stationnaire $\psi(B)(\varepsilon)$. Notons-le X. Il s'agit bien sûr du processus AR(1) vérifiant $(1-\phi B)(X) = \varepsilon$, i.e.

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \varepsilon_t + \phi X_{t-1}.$$

Montrons que $\mathbb{E}\left[(Y_t - X_t)^2\right]$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. En effet, quel que soit t,

$$Y_t - X_t = \sum_{u=0}^{t-1} \phi^u \varepsilon_{t-u} - \sum_{u=0}^{+\infty} \phi^u \varepsilon_{t-u} = -\sum_{u=t}^{+\infty} \phi^u \varepsilon_{t-u} = -\phi^t \sum_{v=0}^{+\infty} \phi^v \varepsilon_{-v} = -\phi^t X_0$$

Comme d'habitude, la convergence de toutes ces séries est à comprendre au sens de la norme hilbertienne. On en déduit

$$\mathbb{E}\left[(Y_t - X_t)^2\right] = \phi^{2t}\mathbb{E}\left[X_0^2\right] = \phi^{2t}\gamma_X(0)$$

Comme $|\phi|$ est strictement plus petit que 1, il s'ensuit que la limite de $\mathbb{E}\left[(Y_t - X_t)^2\right]$ est bien nulle quand t tend vers $+\infty$. On a ainsi montré que Y est asymptotiquement stationnaire sous la seule condition $|\phi| < 1$.

Ex 3.

1. Notons d'abord que $X+X'$ est bien un processus du second ordre. Calculons-en la fonction moyenne et la fonction d'autocovariance :

$$\begin{aligned}
\mu_{X+X'}(t) &= \mathbb{E}[X_t + X'_t] = \mu_X + \mu_{X'} \\
\gamma_{X+X'}(s,t) &= \operatorname{cov}(X_s + X'_s, X_t + X'_t)) \\
&= \operatorname{cov}(X_s, X_t) + \operatorname{cov}(X'_s, X'_t) \text{ car } X \text{ et } X' \text{ sont décorrélés} \\
&= \gamma_X(|t-s|) + \gamma_{X'}(|t-s|)
\end{aligned}$$

en ayant noté μ_X, $\mu_{X'}$ les moyennes de X et X' et γ_X, $\gamma_{X'}$ leurs fonctions d'autocovariance. La moyenne du processus $X + X'$ est donc constante, et sa fonction d'autocovariance est invariante par translation temporelle :

$$\begin{aligned}
&\forall s,t,u \in \mathbb{Z}, \\
\gamma_{X+X'}(s+u,t+u) &= \gamma_X(|t+u-s-u|) + \gamma_{X'}(|t+u-s-u|) \\
&= \gamma_X(|t-s|) + \gamma_{X'}(|t-s|) \\
&= \gamma_{X+X'}(s,t)
\end{aligned}$$

Le processus $X + X'$ est donc faiblement stationnaire, et on note plus simplement sa fonction d'autocorrélation $\gamma_{X+X'}(n) = \gamma_X(n) + \gamma_{X'}(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Comme X est un processus MA(q), d'après un théorème vu en cours, sa fonction d'autocorrélation et sa fonction d'autocovariance s'annulent à partir du rang $q+1$ inclus. De même, la fonction d'autocovariance de X' s'annule à partir du rang $q'+1$ inclus. D'où il s'ensuit que pour tout $n > \max(q,q')$, alors

$$\rho_{X+X'}(n) = \frac{\gamma_{X+X'}(n)}{\gamma_{X+X'}(0)} = \frac{\gamma_X(n) + \gamma_{X'}(n)}{\gamma_{X+X'}(0)} = 0$$

Or, toujours d'après le même théorème, un processus faiblement stationnaire dont la fonction d'autocorrélation s'annule à partir d'un rang m donné est un processus MA d'ordre inférieur ou égal à $m-1$. On en déduit que $X+X'$ est un processus MA d'ordre inférieur ou égal à $\max(q,q')$.

3. Que vaut $\phi(B) \circ \phi'(B)(X+X')$?

$$\begin{aligned}
\phi(B) \circ \phi'(B)(X+X') &= \phi'(B) \circ \phi(B)(X) + \phi(B) \circ \phi'(B)(X') \\
&\quad \text{car les filtres commutent et sont linéaires} \\
&= \phi'(B) \circ \theta(B)(\varepsilon) + \phi(B) \circ \theta'(B)(\varepsilon')
\end{aligned}$$

Le filtre $\phi'(B) \circ \theta(B) = (\phi' * \theta)(B)$ a pour transformée en z

$$\begin{aligned}
(\phi' * \theta)(z) &= \phi'(z)\theta)(z) = (1 + \phi'_1 z + \cdots + \phi'_{p'} z^{p'})(1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q) \\
&= 1 + (\phi'_1 + \theta_1)z + \cdots + \phi'_{p'}\theta_q z^{p'+q}
\end{aligned}$$

Ce filtre est donc égal à $I + (\phi'_1 + \theta_1)B + \cdots + \phi'_{p'}\theta_q B^{p'+q}$, et $\phi'(B) \circ \theta(B)(\varepsilon)$ est donc un processus MA d'ordre $p'q$. De même, $\phi(B) \circ \theta'(B)(\varepsilon')$ est un processus MA d'ordre pq', décorrélé avec le précédent. D'après la deuxième question, la somme de ces deux processus est un MA d'ordre m inférieur ou égal à $\max(pq', p'q)$. Soit donc ε'' bruit blanc faible et $\theta''_1, \ldots, \theta'_m$ tels que

$$\phi'(B) \circ \theta(B)(\varepsilon) + \phi(B) \circ \theta'(B)(\varepsilon') = (I + \theta''_1 B + \cdots + \theta''_m B^m)(\varepsilon'') = \theta''(B)(\varepsilon'')$$

D'autre part, la transformée en z du filtre $\phi(B) \circ \phi'(B)$ est $\phi(z)\phi'(z)$, qui n'a pas de racine de module 1, car ni $\phi(z)$ ni $\phi'(z)$ n'en ont, les filtres $\phi(B)$ et $\phi'(B)$ étant par hypothèse inversibles. Donc $\phi(B) \circ \phi'(B)$ est un filtre inversible. Il s'ensuit que le processus $X + X'$ est le processus faiblement stationnaire qui vérifie l'équation ARMA

$$(\phi * \phi')(B)(X) = \theta''(B)(\varepsilon'').$$

Comme le degré du polynôme $(\phi * \phi')(z)$ est pp', $X + X'$ est un processus ARMA(p'', q'') avec $p'' \leq pp'$ et $q'' \leq m \leq \max(q, q')$ (les ordres peuvent être inférieurs car il peut y avoir des simplifications si $(\phi * \phi')(z)$ et $\theta''(z)$ ont des racines communes).

Ex 4.

1. Soit X faiblement stationnaire, μ_X sa moyenne et γ_X sa fonction d'autocovariance. Alors, quels que soient $m < n$, l'espérance de $(X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ et $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_m)$ est le vecteur $\mu_X(1, \ldots, 1)$; calculons leur matrice de covariance :

$$\begin{aligned} \Gamma_{(X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)} &= (\operatorname{cov}(X_{m+i}, X_{m+j}))_{0 \leq i,j \leq n-m} = (\gamma_X(|j-i|)_{0 \leq i,j \leq n-m} \\ \Gamma_{(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_m)} &= (\operatorname{cov}(X_{n-i}, X_{n-j}))_{0 \leq i,j \leq n-m} = (\gamma_X(|j-i|)_{0 \leq i,j \leq n-m} \end{aligned}$$

   Les vecteurs aléatoires $(X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ et $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_m)$ ont donc même espérance et même matrice de covariance. Ceci étant vrai pour tous $m < n$, on montre ainsi que X est faiblement réversible.

2. Si X est un processus stationnaire gaussien, alors il est faiblement stationnaire et donc faiblement réversible. Soient $m < n$ quelconques ; les vecteurs aléatoires $(X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ et $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_m)$ sont donc des vecteurs gaussiens de même espérance et même matrice de covariance ; or la loi d'un vecteur gaussien est entièrement déterminée par son espérance et sa matrice de covariance ; les vecteurs $(X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ et $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_m)$ ont donc même loi. On a ainsi montré que X est réversible.

3. (a) La matrice de transition de la chaîne de Markov est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La probabilité ν est une mesure invariante de la chaîne de Markov si et seulement si $N = (\nu(\{0\}), \nu(\{1\}), \nu(\{2\})) = (1/3, 1/3, 1/3)$ vérifie $NP = N$, ce qui est, à l'évidence, le cas.

   (b) Soient $s, t, u \in \mathbb{Z}$ quelconques, avec $s \leq t$. Montrons que $(X_s, \ldots, X_t)$ a même loi que $(X_{s+u}, \ldots, X_{t+u})$. Il suffit de vérifier que pour tout $t - s + 1$-uplet $(e_0, \ldots, e_{t-s}) \in E^{t-s+1}$, alors

$$\mathbb{P}((X_s, \ldots, X_t) = (e_0, \ldots, e_{t-s})) = \mathbb{P}((X_{s+u}, \ldots, X_{t+u}) = (e_0, \ldots, e_{t-s}))$$

   En effet,

$$\mathbb{P}((X_{s+u}, \ldots, X_{t+u}) = (e_0, \ldots, e_{t-s})) = \nu(\{e_0\})p(e_0, e_1) \cdots p(e_{t-s-1}, e_{t-s})$$

   Cette probabilité ne dépend pas de u, ce qui démontre le résultat.

   (c) Il suffit d'un contre-exemple pour montrer que X n'est pas réversible. Posons $m = 0$ et $n = 1$. Alors

$$\mathbb{P}((X_0, X_1) = (0, 1)) = \nu(\{0\})\, p(0, 1) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}((X_1, X_0) = (0, 1)) = \nu(\{0\})\, p(1, 0) = 0$$

   La loi de (X_0, X_1) est donc différente de (X_1, X_0), ce qui prouve que X n'est pas réversible.