

Maîtrise MASS - Statistique des processus

Examen du 4 juin 2002

14h - 17h

Les documents et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet comporte deux pages.

Ex 1. On considère $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ une famille de variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre $1/2$, et soit f une fonction définie sur $\{0, 1\}^2$ à valeurs réelles : on note

$$f(0,0) = a, \quad f(0,1) = b, \quad f(1,0) = c, \quad f(1,1) = d$$

On définit pour tout $t \in \mathbb{Z}$ $Y_t = f(X_t, X_{t-1})$.

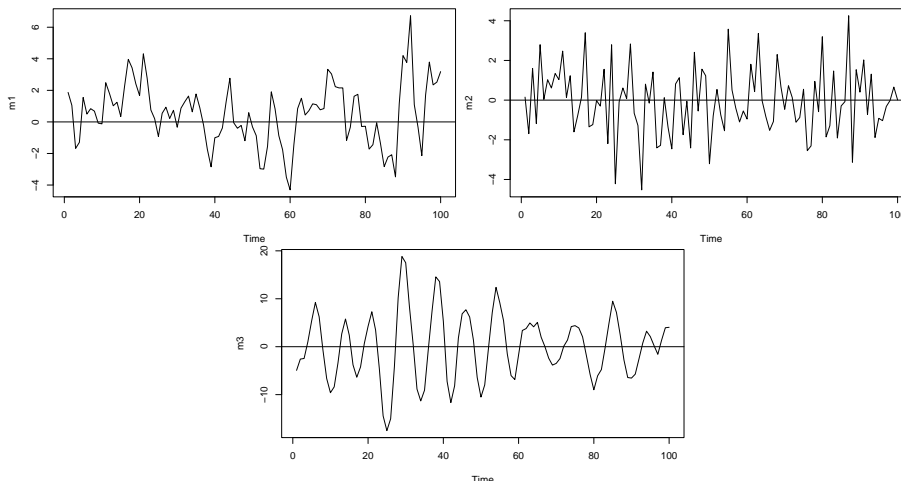
1. Montrer que $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus strictement stationnaire.
2. Déterminer a, b, c et d de sorte que $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$ soit un bruit blanc faible, mais pas un bruit blanc fort.

Ex 2. Soit X un processus ARMA(1,1) vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - 2X_{t-1} = \varepsilon_t + 3\varepsilon_{t-1}$$

avec ε un bruit blanc de variance 1.

1. Déterminer et représenter graphiquement la densité spectrale de X .
2. Parmi les trois séries suivantes (m1, m2, m3), déterminer laquelle est une réalisation du processus X , en justifiant le choix :



3. Donner de X une représentation ARMA causale et inversible.
4. Déterminer sa représentation de Wold.
5. Calculer sa fonction d'autocorrélation ρ_X .
6. Vérifier que

$$\det \begin{pmatrix} \rho_X(2) & \rho_X(1) \\ \rho_X(3) & \rho_X(2) \end{pmatrix} = 0$$

Puis justifier ce résultat sans calcul.

7. On pose $\tilde{\varepsilon}_t = X_t - P_{V^2(X_1, \dots, X_{t-1})}^\perp(X_t)$ pour $t > 1$ et $\tilde{\varepsilon}_1 = X_1$. Montrer que pour tout $t > 1$

$$X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} = \tilde{\varepsilon}_t + \frac{1}{3\delta_{t-1}}\tilde{\varepsilon}_{t-1}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{52}{27} \\ \delta_t &= \frac{9\delta_1(1-9^{-t}) - (1-9^{-t+1})}{9\delta_1(1-9^{-t+1}) - (1-9^{-t+2})} \end{aligned}$$

8. On suppose connus X_1, \dots, X_N , et on note $\check{X}_{N+h} = P_{V^2(X_1, \dots, X_N)}^\perp(X_{N+h})$ le meilleur prédicteur linéaire de X_{N+h} (avec $h \geq 1$). Calculer l'erreur de prédiction pour $h = 1, 2$, puis, en supposant N grand et $\check{X}_{N+h} \simeq P_{V^2(X_t, t \leq N)}^\perp(X_{N+h})$, en donner une approximation pour h quelconque.

Ex 3. Soit $Y = (Y_t, t = 1, \dots, N)$ le processus du second ordre vérifiant le modèle suivant

$$\begin{aligned} Y_t &= m_1 + X_t \quad \forall t = 1, \dots, T \\ Y_t &= m_2 + X_t \quad \forall t = T+1, \dots, N \end{aligned}$$

avec X processus stationnaire. Ce modèle est dit avec intervention, car il permet de modéliser l'effet d'une perturbation extérieure au temps T (chute de la Bourse, raz-de-marée, ...).

1. On suppose que X est un bruit blanc gaussien. Déterminer, en fonction de Y_1, \dots, Y_N , les estimateurs du maximum de vraisemblance de m_1 et m_2 , et calculer leurs moyennes, leurs variances, et leur covariance.
2. On suppose désormais que X est un processus auto-régressif d'ordre 1 :

$$X_t + \theta X_{t-1} = \varepsilon_t$$

avec $|\theta| < 1$ et ε bruit blanc gaussien de variance σ^2 . On pose $\tilde{\varepsilon}_t = X_t - P_{V^2(X_1, \dots, X_{t-1})}^\perp(X_t)$ pour tout $t > 1$, et $\tilde{\varepsilon}_1 = X_1$. Montrer que $\tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t$ pour tout $t > 1$.

3. Calculer $\delta_t = \mathbb{E}[\tilde{\varepsilon}_t^2]/\sigma^2$, et en déduire la densité de la loi de $(\tilde{\varepsilon}_t, t = 1, \dots, N)$.
4. Grâce à des changements de variables, déterminer la densité de la loi de $(X_t, t = 1, \dots, N)$, puis de $(Y_t, t = 1, \dots, N)$.
5. En supposant θ connu, déterminer, en fonction de (Y_1, \dots, Y_N) , les estimateurs du maximum de vraisemblance de m_1 et m_2 et calculer leurs moyennes.