

Maîtrise MASS

Partiel du 2 avril 2002

15h30 - 17h30

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Le sujet comporte deux pages.

B désigne l'opérateur retard $B(x)_t = x_{t-1}$, $F = B^{-1}$ l'opérateur avance, et l'on note

$$B^p = \begin{cases} B^{\circ p} & \text{si } p > 0 \\ I & \text{si } p = 0 \\ F^{\circ -p} & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

Question de cours : Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus ARMA(p, q) tel que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

avec ε bruit blanc. Donner le système d'équations, dit de Yule-Walker, qui permet de calculer (ϕ_1, \dots, ϕ_p) en fonction de l'autocorrélation de X .

Ex 1. On souhaite construire une moyenne mobile $\phi(B)$ de la forme

$$\phi(B) = \sum_{i=-3}^3 \phi_i B^i$$

qui annule les composantes saisonnières de période 5 et qui conserve les tendances affines.

1. Montrer qu'un tel filtre peut s'écrire comme le produit de composition suivant :

$$\phi(B) = (\alpha F + \beta I + \gamma B) \circ \frac{1}{5} (F^2 + F + I + B + B^2)$$

Quelles conditions doit vérifier le triplet (α, β, γ) ?

2. Parmi les moyennes mobiles décrites à la question précédente, déterminer celle qui minimise le rapport de variance résiduelle.

Ex 2. On considère le processus $Y = (Y_t, t \in \mathbb{N})$ défini par :

$$\begin{cases} Y_0 = 0 \\ Y_t = \varepsilon_t + \phi Y_{t-1} \quad \forall t \geq 1 \end{cases}$$

avec $\phi \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc faible de variance $\sigma^2 \neq 0$.

1. Calculer la variance de Y_t , pour tout $t \in \mathbb{N}$.
2. A quelle condition sur ϕ le bruit blanc ε est-il le processus d'innovation associé à Y (i.e. $\varepsilon_t = Y_t - P_{V^2(Y_s, 0 \leq s < t)}^\perp(Y_t) \quad \forall t \geq 1$) ?

3. A quelle condition sur ϕ le processus Y est-il asymptotiquement faiblement stationnaire, i.e. il existe $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ faiblement stationnaire tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[(Y_t - X_t)^2 \right] = 0$$

Ex 3. Soient $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ et $\varepsilon' = (\varepsilon'_t, t \in \mathbb{Z})$ deux bruits blancs décorrélés.

1. On considère deux processus faiblement stationnaires décorrélés X et X' . Montrer que $X + X'$ est faiblement stationnaire.
2. On suppose que X et X' sont de type MA(q) et MA(q'), vérifiant $X = \theta(B)(\varepsilon)$ et $X' = \theta'(B)(\varepsilon')$, avec

$$\begin{aligned} \theta(B) &= I + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q \\ \theta'(B) &= I + \theta'_1 B + \dots + \theta'_{q'} B^{q'} \end{aligned}$$

Montrer que $X + X' = (X_t + X'_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus MA d'ordre au plus $\max(q, q')$. Indication : on pourra étudier le comportement de la fonction d'autocorrélation de $X + X'$.

3. On suppose maintenant que X et X' sont de type ARMA(p, q) et ARMA(p', q'), vérifiant $\phi(B)(X) = \theta(B)(\varepsilon)$ et $\phi'(B)(X') = \theta'(B)(\varepsilon')$, avec

$$\begin{aligned} \phi(B) &= I + \phi_1 B + \dots + \phi_p B^p \\ \phi'(B) &= I + \phi'_1 B + \dots + \phi'_{p'} B^{p'} \end{aligned}$$

Montrer que le processus $X + X' = (X_t + X'_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus ARMA(p'', q'') avec $p'' \leq pp'$ et $q'' \leq \max(pq', p'q)$. Indication : on pourra étudier le processus $\phi(B) \circ \phi'(B)(X + X')$.

Ex 4. Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus du second ordre. Il est dit réversible (resp. faiblement réversible) si et seulement si, pour tous entiers relatifs $m < n$, les vecteurs aléatoires $(X_m, X_{m+1}, \dots, X_n)$ et $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_m)$ ont même loi (resp. même vecteur moyenne et même matrice de covariance).

1. Montrer que si X est faiblement stationnaire, alors il est faiblement réversible.
2. Montrer que si X est un processus stationnaire gaussien, alors il est réversible.
3. Soit $E = \{0, 1, 2\}$ et X la chaîne de Markov sur E telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on ait

$$\nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 1/3$$

et

$$\begin{aligned} p(0, 1) &= p(1, 2) = p(2, 0) = 1 \\ p(i, j) &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

en notant $\nu(\{i\}) = \mathbb{P}(X_t = i)$ et $p(i, j) = \mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i)$.

- (a) Vérifier que la loi ν est bien une probabilité invariante de la chaîne de Markov.
- (b) Montrer que X est stationnaire.
- (c) Montrer qu'il n'est pas réversible.