

Maîtrise MASS - Statistique des processus

Examen du 3 septembre 2002

9h-12h

Les documents et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet comporte trois pages.

B désigne l'opérateur retard $B(x)_t = x_{t-1}$, $F = B^{-1}$ l'opérateur avance, et I l'identité.

Ex 1. Répondre aux questions suivantes par Vrai ou Faux, en justifiant votre choix :

1. Un processus centré de variance constante est strictement stationnaire.
2. Un processus centré est faiblement stationnaire.
3. Un processus gaussien faiblement stationnaire est centré.
4. Tout processus strictement stationnaire est faiblement stationnaire.
5. Une moyenne mobile symétrique conserve les tendances affines.
6. Soit X un processus faiblement stationnaire. Si sa fonction d'autocorrélation s'annule à partir du rang 1 inclus, alors sa fonction d'autocorrélation partielle est également nulle.
7. Les équations de Yule-Walker permettent de calculer la fonction d'autocorrélation partielle.
8. Les équations de Yule-Walker permettent de calculer les coefficients de l'équation de récurrence vérifiée par un processus autorégressif.
9. Un processus ARMA caractérisé par un modèle non causal et non inversible ne possède pas de représentation de Wold.
10. Un processus stationnaire périodique ne possède pas de densité spectrale.

Ex 2.

1. Soit (U, V) un vecteur gaussien centré, avec $\text{var}(U) = a^2$, $\text{var}(V) = b^2$. On note r la corrélation entre U et V , qu'on suppose différente de 1 et -1 , et on définit

$$X = \frac{U}{a} + \frac{V}{b} \qquad Y = \frac{U}{a} - \frac{V}{b}$$

- (a) Montrer que X et Y sont indépendantes.
- (b) En déduire

$$\mathbb{P}(U > 0, V < 0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-r^2}} \int_0^{+\infty} dy \int_{-y}^y dx \exp\left(-\frac{x^2}{4(1+r)} - \frac{y^2}{4(1-r)}\right)$$

- (c) Calculer l'expression ci-dessus à l'aide d'un changement de variables homothétique, puis d'un changement de variables en pôlaires.

- (d) Montrer que $\arccos r = 2 \arctan \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}$ quel que soit $r \in [-1, 1]$, et en déduire que la probabilité que U et V ne soient pas de même signe est égale à

$$\mathbb{P}(UV < 0) = \frac{\arccos(r)}{2\pi}$$

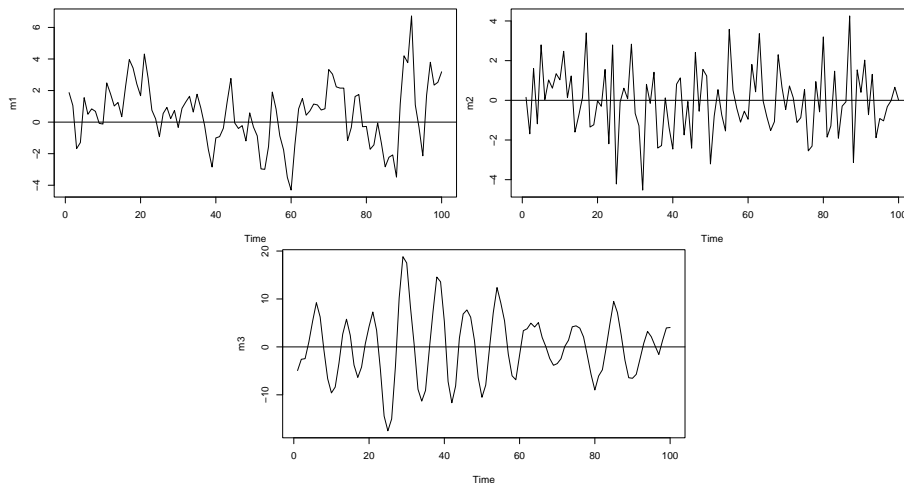
2. Soit $(\varepsilon_t, t = 1, \dots, 2N)$ un bruit blanc gaussien de variance 1. Soit T le nombre de couples $(\varepsilon_{2p-1}, \varepsilon_{2p})$ de signe opposé, p variant entre 1 et N .
- Calculer $\mathbb{P}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+1} < 0)$.
 - Montrer que T suit une loi binômiale de paramètres $1/2$ et N .
 - Soit $x = (x_t, t = 1, \dots, 2N)$ une série chronologique. Déduire de ce qui précède un test asymptotique de l'hypothèse $H_0 : x$ est une réalisation de bruit blanc gaussien.
3. On considère la moyenne mobile $M_3 = (B + I + F)/3$.
- Quelles sont ses propriétés ?
 - On note $X = M_3(\varepsilon)$. Déterminer et représenter graphiquement la densité spectrale de X .
 - Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X_t X_{t-1} < 0)$ et comparer-la à $\mathbb{P}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} < 0)$. Pouvait-on prévoir ce résultat au vu de la densité spectrale ?

Ex 3. Soit X un processus ARMA(1,1) vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - 3X_{t-1} = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$$

avec ε un bruit blanc de variance 1.

- Déterminer et représenter graphiquement la densité spectrale de X .
- Parmi les trois séries suivantes (m1, m2, m3), déterminer laquelle est une réalisation du processus X , en justifiant le choix :



- Donner de X une représentation ARMA causale et inversible.
- Déterminer sa représentation de Wold.

5. Calculer sa fonction d'autocorrélation ρ_X .

6. Vérifier que

$$\det \begin{pmatrix} \rho_X(2) & \rho_X(1) \\ \rho_X(3) & \rho_X(2) \end{pmatrix} = 0$$

Puis justifier ce résultat sans calcul.

7. On pose $\tilde{\varepsilon}_t = X_t - P_{V^{\perp}(X_1, \dots, X_{t-1})}(X_t)$ pour $t > 1$ et $\tilde{\varepsilon}_1 = X_1$. Montrer que pour tout $t > 1$

$$X_t - \frac{1}{3}X_{t-1} = \tilde{\varepsilon}_t + \frac{1}{2\delta_{t-1}}\tilde{\varepsilon}_{t-1}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{57}{32} \\ \delta_t &= \frac{4\delta_1(1 - 4^{-t}) - (1 - 4^{-t+1})}{4\delta_1(1 - 4^{-t+1}) - (1 - 4^{-t+2})} \end{aligned}$$

8. On suppose connus X_1, \dots, X_N , et on note $\tilde{X}_{N+h} = P_{V^{\perp}(X_1, \dots, X_N)}(X_{N+h})$ le meilleur prédicteur linéaire de X_{N+h} (avec $h \geq 1$). Calculer l'erreur de prédiction pour $h = 1, 2$, puis, en supposant N grand et $\tilde{X}_{N+h} \simeq P_{V^{\perp}(X_t, t \leq N)}(X_{N+h})$, en donner une approximation pour h quelconque.