Université de Paris 5 – René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Statistique des Processus - Maîtrise MASS

Examen du 10 juin 2003

9h - 12h

Les documents sont autorisés.

Le sujet comporte quatre pages.

Ex 1. Répondre aux questions suivantes par Vrai ou Faux, en justifiant votre choix :

1. La somme de deux processus MA indépendants est un processus MA.
2. La somme d'un processus AR et d'un processus MA indépendants est un processus ARMA.
3. La somme de deux processus AR indépendants est un processus AR.
4. Soit X un processus faiblement stationnaire. Si sa fonction d'autocorrélation s'annule à partir du rang 1 inclus, alors sa fonction d'autocorrélation partielle est également nulle.
5. Un processus ARMA caractérisé par un modèle non causal et non inversible ne possède pas de représentation de Wold.
6. La densité spectrale d'un processus ARMA ne s'annule pas.
7. Un modèle linéaire avec erreurs ARMA ne peut modéliser une série temporelle avec une tendance périodique.
8. On peut valider un modèle linéaire avec erreurs corrélées en faisant un test de bruit blanc.
9. Un processus ARIMA(p, d, q) est faiblement stationnaire si et seulement si $d \leq \max(p, q)$.
10. Le processus d'innovation d'un processus SARIMA est périodique.

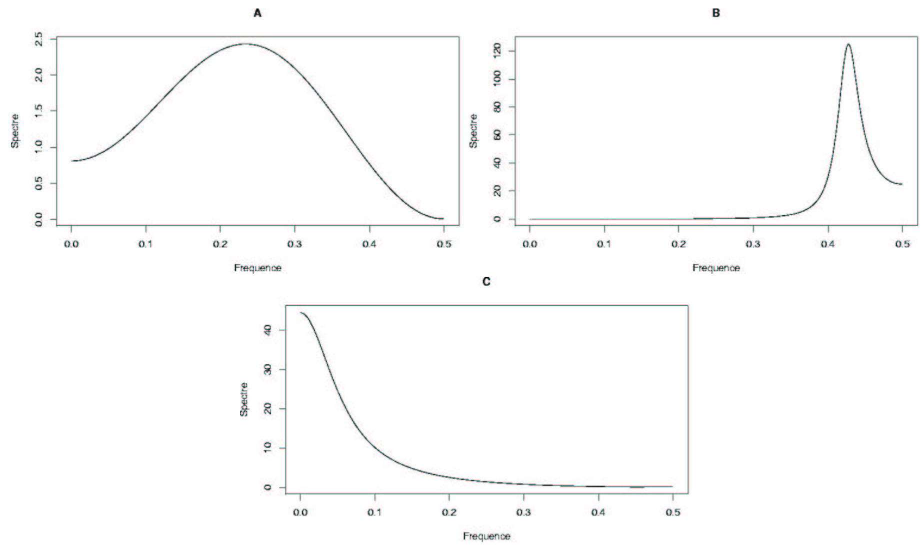
Ex 2. Soit X, Y et Z trois processus ARMA vérifiant pour tout $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t - 1,6X_{t-1} - 0,8X_{t-2} \\ Y_t &= \varepsilon_t + 0,4\varepsilon_{t-1} + 0,7Y_{t-1} \\ Z_t &= \varepsilon_t + 0,4\varepsilon_{t-1} - 0,5\varepsilon_{t-2} \end{aligned}$$

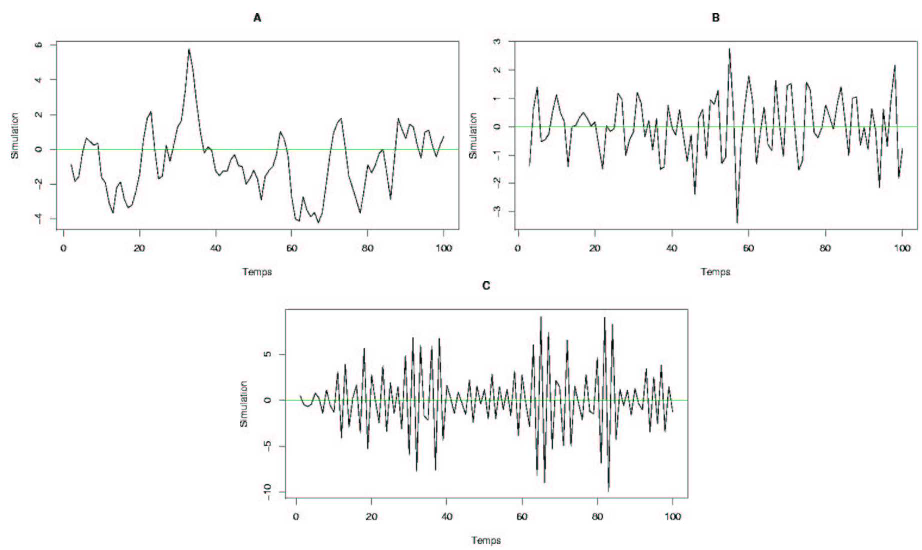
avec ε bruit blanc de variance σ^2.

1. Préciser la nature de ces processus, déterminer leurs bruits blancs d'innovation, et calculer leurs fonctions d'autocovariance.

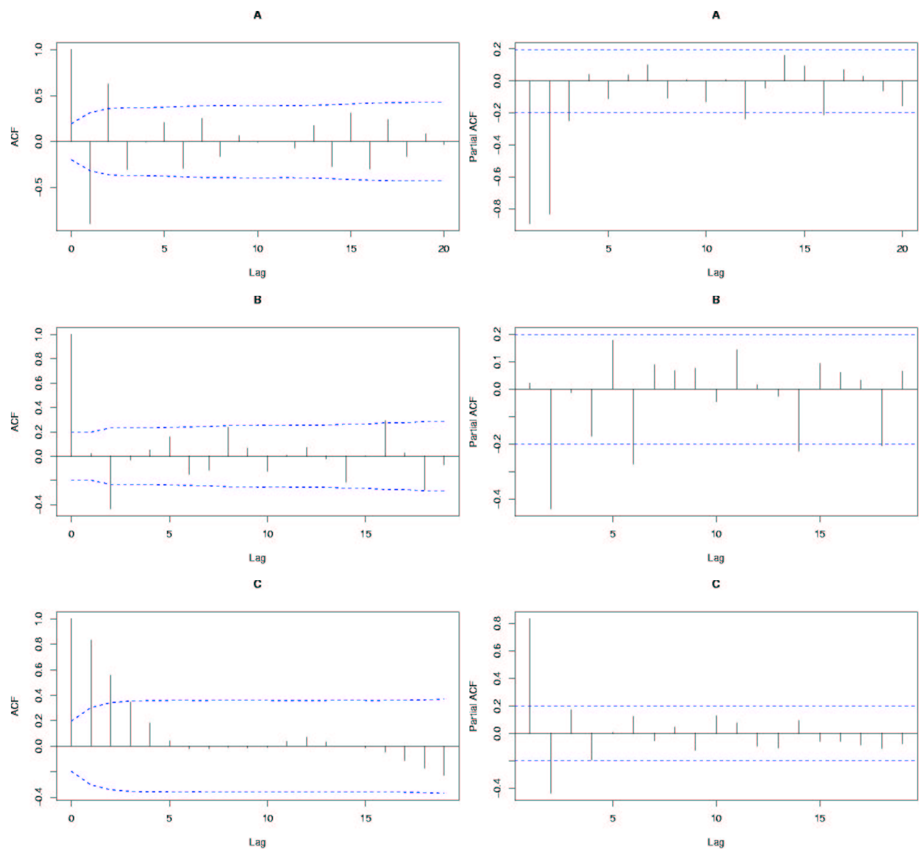
2. On a tracé ci-dessous la densité spectrale de ces trois processus. En le justifiant, déterminer quel processus correspond à quelle densité.



3. À partir d'une simulation du bruit blanc ε, on a tracé les trois trajectoires suivantes, correspondant à une réalisation de chacun des processus X, Y et Z entre les instants 1 à 100. En le justifiant, déterminer quel processus correspond à quelle trajectoire.



4. Pour chacune des réalisations précédentes, on a tracé l'autocorrélogramme correspondant (autocorrélation empirique et autocorrélation partielle empirique). En le justifiant, déterminer quel processus correspond à quel autocorrélogramme.



Ex 3. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ^2. Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ le processus AR(1) tel que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \varepsilon_t + \varphi X_{t-1}.$$

avec $|\varphi| < 1$.

1. On souhaite estimer φ et σ^2 en fonction de $(X_1, \ldots, X_N)$.
   (a) Déterminer l'estimateur préliminaire de φ.
   (b) On pose pour tout $t \geq 1$

   $$\tilde{\varepsilon}_t = X_t - P^{\perp}_{V^2(1, X_1, \ldots, X_{t-1})}(X_t)$$

   Calculer explicitement $\tilde{\varepsilon}_t$ en fonction de $(X_1, \ldots, X_t)$ pour tout $t \geq 1$.
   (c) Déterminer l'estimateur $\hat{\varphi}_{mco}$ des moindres carrés ordinaires de φ et l'estimateur correspondant de σ^2.
   (d) Déterminer l'estimateur $\hat{\varphi}_{mcc}$ des moindres carrés conditionnels de φ. Comparer $\hat{\varphi}_{mco}$ et $\hat{\varphi}_{mcc}$.
   (e) On suppose ici le bruit blanc ε gaussien. Proposer une équation caractérisant alors l'estimateur $\hat{\varphi}_{mv}$ du maximum de vraisemblance de φ. Montrer que

   $$|\hat{\varphi}_{mco} - \hat{\varphi}_{mv}| \leq \frac{1}{\sqrt{\sum_{t=2}^{N-1} X_t^2}}.$$

Que peut-on en conclure ?

2. En supposant φ et σ connus, déterminer pour tout $h \geq 1$ le meilleur prédicteur linéaire de X_{N+h}, sachant $(X_1, \ldots, X_N)$, ainsi que la variance de l'erreur de prédiction.
3. On pose pour tout $t \in \mathbb{Z}$ $Y_t = X_{-t}$.
   (a) Montrer que $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus faiblement stationnaire, de même fonction d'autocovariance que X.
   (b) Préciser la nature du processus Y, et calculer son bruit blanc d'innovation en fonction de ε.
   (c) On suppose dans toute la suite que
   $$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(\varepsilon_t = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_t = -1) = \frac{1}{2}$$
   Déterminer la variance de ε_t.
   (d) On suppose encore que $\varphi = 1/3$, et que sont connus $(Y_1, \ldots, Y_N)$. Sans calcul ou presque, déterminer la variance de l'erreur de prédiction commise au pas h (i.e. entre Y_{N+h} et le meilleur prédicteur linéaire de Y_{N+h}), avec $h \geq 1$.
   (e) Montrer que pour tout $h \geq 1$, Y_{N+h} est en fait une fonction de Y_N, et qu'on peut donc le prédire sans erreur. Indication : représenter X_t sous forme MA(∞).
   (f) Expliquer l'apparente contradiction entre les deux questions précédentes.