Université de Paris 5 – René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Statistique des Processus - Maîtrise MASS

Partiel du 2 avril 2003

14h15 - 17h15

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Le sujet comporte deux pages.

B désigne l'opérateur retard $B(x)_t = x_{t-1}$, et B^{-1} son inverse $B^{-1}(x)_t = x_{t+1}$.

Ex 1. Le but de cet exercice est de définir un nouveau test de bruit blanc.

1. Rappeler les deux tests de bruit blanc vus en cours, en précisant leurs statistiques et zones de rejet.
2. Soit $(\varepsilon_t, t = 1, \dots, 2N)$ un bruit blanc gaussien de variance 1. Soit T le nombre de couples $(\varepsilon_{2p-1}, \varepsilon_{2p})$ de signe opposé, p variant entre 1 et N.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+1} < 0)$.
   (b) Montrer que T suit une loi binômiale de paramètres $1/2$ et N.
   (c) Soit $x = (x_t, t = 1, \dots, 2N)$ une série chronologique. Déduire de ce qui précède un test asymptotique de l'hypothèse H_0 : x est une réalisation de bruit blanc gaussien.

Ex 2. Soient $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$, $\varepsilon' = (\varepsilon'_t, t \in \mathbb{Z})$ et $\varepsilon'' = (\varepsilon''_t, t \in \mathbb{Z})$ trois bruits blancs indépendants, de variances respectives σ^2, σ'^2 et σ''^2.

1. Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus faiblement stationnaire vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t + \frac{3}{2} X_{t-1} = \varepsilon_t$$
De quel type de processus s'agit-il ? En donner une représentation causale et inversible, puis de type MA(∞). Préciser la variance de son bruit blanc d'innovation, et sa fonction d'autocovariance.
2. Soit $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$ le processus défini par
$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad Y_t = X_t + \varepsilon'_t$$
Montrer que Y est un processus faiblement stationnaire.
3. Soit $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus faiblement stationnaire vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad Z_t + \varphi Z_{t-1} = \varepsilon''_t + \theta \varepsilon''_{t-1}$$
avec $|\theta| < 1$ et $|\varphi| < 1$. Déterminer sa fonction d'autocovariance. Montrer que pour des valeurs bien choisies de θ, φ et σ''^2, elle est égale à la fonction d'autocovariance de Y (on précisera la valeur de φ et un système d'équations vérifiées par θ et σ''^2). En déduire la nature du processus Y.

Ex 3. Soit $x = (x_t, t \in \{1, \ldots, n\})$ une série temporelle, que l'on pense pouvoir modéliser par un processus $X = (X_t, t \in \{1, \ldots, n\})$ vérifiant

$$\forall t \in \{1, \ldots, n\}, \quad X_t = a + bt + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

avec $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

1. Pour vérifier que la tendance est effectivement linéaire, on se propose d'en effectuer une estimation préliminaire à l'aide de la méthode des moyennes mobiles. Plus précisément, on définit comme estimateur de $f_\tau(t) = a + bt$ la variable aléatoire $\hat{X}_t = \phi(B)(X)_t$ où

$$\phi(B) = \alpha B + \beta I + \gamma B^{-1}$$

   (a) Montrer que $\phi(B)$ conserve la tendance affine, autrement dit que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \phi(B)(f_\tau)_t = f_\tau(t),$$

   si et seulement si $\gamma = \alpha$ et $\beta = 1 - 2\alpha$.

   (b) En fonction de θ, déterminer, parmi les filtres qui conservent la tendance affine, celui qui permet d'obtenir l'estimateur de risque quadratique minimal.

2. On souhaite maintenant estimer par les coefficients a et b par la méthode des moindres carrés, ou, ce qui revient au même dans le cadre d'un modèle gaussien, par la méthode du maximum de vraisemblance.

   (a) Si $\theta = 0$, rappeler quels sont les estimateurs des moindres carrés de a et b.

   (b) On suppose θ quelconque, mais connu. Calculer la matrice de covariance $\Gamma_X(n)$ de $(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la densité de la loi de $(X_1, \ldots, X_n)$, et en déduire l'expression matricielle des estimateurs du maximum de vraisemblance de a et b (on ne demande pas de calculer $\Gamma_X(n)^{-1}$).

3. Déterminer le meilleur prédicteur linéaire de X_{n+2} sachant $X_1, \ldots, X_n$, et donner un intervalle de prédiction à 95% (on ne demande pas d'application numérique).

Ex 4. Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ le processus défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \cos\left(\frac{2\pi t}{3} + U\right)$$

où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

1. Montrer que X est un processus du second ordre. Déterminer sa fonction moyenne et sa fonction d'autocovariance. En déduire qu'il est faiblement stationnaire.
2. Montrer que son processus d'innovation est le processus nul.
3. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi t}{3} + U\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi t}{3} + U\right)$ sont décorrélées. En déduire le calcul de $P^{\perp}_{V^2(1, X_t)}(X_{t+1})$ et de $P^{\perp}_{V^2(1, X_t, X_{t+1})}(X_{t+2})$.
4. Calculer la fonction r_X d'autocorrélation partielle de X. Montrer en particulier que $r_X(h) = 0$ pour tout $h \geq 3$. Peut-on en déduire que X est un processus AR ?