Université de Paris 5 – René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Statistique des Processus - Maîtrise MASS

Corrigé du partiel du 22 mars 2004

Ex 1.

1. Étude de la série "Nombre de résidents australiens". La série est très lisse, et il ne paraît pas nécessaire de la lisser davantage avec une moyenne mobile. La tendance paraît affine, et on peut proposer le modèle de régression à un facteur
$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad X_t = a + bt + \varepsilon_t$$
avec $\mathcal{T} = \{03/1971, 06/1971, \ldots, 03/1994\}$, qu'on identifie à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 93\}$ dans la formule de régression, et ε bruit blanc de variance σ^2. Les autres paramètres sont a et b, paramètres libres. Le modèle est donc de rang 2.

2. Étude de la série "Mortalité d'origine pulmonaire". Il y a un phénomène saisonnier très marqué, ce qui ne surprend guère pour des pathologies à l'évidence liées aux saisons. La périodicité est de 12 mois. Pour mieux estimer la tendance, on peut donc lisser la série avec une moyenne mobile qui élimine les saisonnalités de période 12 ; par exemple, on peut considérer la série lissée définie par
$$MM_{12}(x)_t = \frac{1}{24} x_{t-6} + \frac{1}{12} \sum_{u=-5}^{5} x_{t-u} + \frac{1}{24} x_{t+6}$$
où l'on a noté x la série étudiée. À première vue, il ne paraît y avoir ni croissance, ni décroissance. On peut donc proposer comme modèle
$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad X_t = a + b_{m(t)} + \varepsilon_t$$
avec $\mathcal{T} = \{01/1974, 02/1974, \ldots, 12/1979\}$, $m(t)$ dénotant le mois à la date t, et ε bruit blanc de variance σ^2. Les autres paramètres sont a et $b_1, \ldots, b_{12}$, ces derniers vérifiant une contrainte $b_1 + \cdots + b_{12} = 0$. Le modèle est donc de rang $1 + (12 - 1) = 12$.

3. Étude de la série "Bénéfices par action J&J". La série est croissante et présente des variations saisonnières de plus en plus fortes. On peut penser que le modèle est multiplicatif et se ramener à un modèle additif par transformation logarithmique des données. La saisonnalité paraît annuelle - donc ici de période 4 -, ce qui est compréhensible pour une série liée à l'activité humaine. Après la transformation logarithmique, on peut donc lisser la série avec une moyenne mobile du type MM_4 ou MM_8 qui supprimera la saisonnalité, pour obtenir une première estimation de la tendance.

Celle-ci est vraisemblablement linéaire ou parabolique. On propose donc le modèle

$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad X'_t (= \ln(X_t)) = a + bt + ct^2 + d_{\tau(t)} + \varepsilon_t$$

avec $\mathcal{T} = \{1/1960, 2/1960, \ldots, 4/1980\}$, $\tau(t)$ dénotant le trimestre à la date t, et ε bruit blanc de variance σ^2. Les autres paramètres sont a, b, c et $d_1, \ldots, d_4$, ces derniers vérifiant une contrainte $d_1 + \cdots + d_4 = 0$. Le modèle est donc de rang $3 + (4 - 1) = 6$.

4. Étude de la série "Débit du Nil". La série est très irrégulière. On ne répère pas de phénomène périodique. On peut lisser la série par une moyenne mobile, en utilisant par exemple la formule

$$MM_{2p+1}(x)_t = \frac{1}{2p+1} \sum_{u=-p}^{p} x_{t-u}$$

où l'on a noté x la série étudiée. Comme il y a une centaine de données, on peut choisir p de l'ordre de 10 si nécessaire. À première vue, sans lissage, on peut penser que la tendance est parabolique, ce qui conduit au modèle

$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad X_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t$$

avec $\mathcal{T} = \{1871, \ldots, 1970\}$, et ε bruit blanc de variance σ^2. Les autres paramètres sont a, b et c, paramètres libres. Le modèle est donc de rang 3.

Ex 2.

1. On considère les estimateurs $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$ de a, b et c obtenus par la méthode des moindres carrés. On définit alors la famille des résidus $\hat{\varepsilon} = (\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{a} - t\hat{b} - t^2\hat{c}, t \in \mathcal{T})$. Ces résidus jouent le rôle de prédicteurs du bruit blanc ε.
2. On suppose $\mathcal{T} = \{1, 2, \ldots, n\}$. On définit un estimateur de la fonction d'autocorrélation de $\hat{\varepsilon}$ par

$$\hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}}(h) = \frac{\frac{1}{n-h} \sum_{u=1}^{n-h} \hat{\varepsilon}_u \hat{\varepsilon}_{u+h}}{\frac{1}{n} \sum_{u=1}^{n} \hat{\varepsilon}_u^2}.$$

On souhaite tester H_0 : ε est un bruit blanc. La zone de rejet du test sera de la forme

$$n \sum_{h=1}^{k} \hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}}(h)^2 > \chi^2_{k,1-\alpha}$$

avec $\chi^2_{k,1-\alpha}$ le fractile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi de χ^2 à k degrés de liberté, si l'on souhaite un test de niveau α. On a d'après l'énoncé $k = 12$.
3. On accepte donc l'hypothèse H_0 au niveau 5% voire 10%. Cela permet de valider le modèle linéaire construit pour modéliser la série du débit du Nil.

Ex 3.

1. Le processus X étant faiblement stationnaire, sa moyenne μ_X est constante. Comme le bruit blanc est centré, on en déduit

$$0 = \mathbb{E}\left[\varepsilon_t\right] = \mathbb{E}\left[X_t\right] - 0,5\mathbb{E}\left[X_{t-1}\right] + 0,06\mathbb{E}\left[X_{t-2}\right] = \mu_X(1-0,5+0,06) = 0,56\mu_X$$

La moyenne μ_X est donc nulle.

2. On calcule facilement

$$\frac{3}{1-0,3z} - \frac{2}{1-0,2z} = \frac{1}{(1-0,3z)(1-0,2z)}\left(3(1-0,2z) - 2(1-0,3z)\right) = \frac{1}{1-0,5z+0,06z}$$

puis

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n}\left(3(0,3z)^p - 2(0,2z)^p\right) &= 3\frac{1-(0,3z)^{n+1}}{1-0,3z} - 2\frac{1-(0,2z)^{n+1}}{1-0,2z} \\
&= \frac{3}{1-0,3z} - \frac{2}{1-0,2z} - 3\frac{(0,3z)^{n+1}}{1-0,3z} + 2\frac{(0,2z)^{n+1}}{1-0,2z} \\
&= \frac{1}{1-0,5z+0,06z} \\
&\quad + \frac{-3(0,3z)^{n+1}(1-0,2z) + 2(0,2z)^{n+1}(1-0,3z)}{(1-0,3z)(1-0,2z)} \\
&= \frac{1}{1-0,5z+0,06z} + \frac{a_n z^{n+1} + b_n z^{n+2}}{1-0,5z+0,06z}
\end{aligned}$$

avec

$$a_n = -3(0,3)^{n+1} + 2(0,2)^{n+1} \text{ et } b_n = 0,6\left((0,3)^{n+1} - (0,2)^{n+1}\right).$$

Les suites $(a_n, n \geq 1)$ et $(b_n, n \geq 1)$ tendent à l'évidence vers 0 en l'infini.

3. On définit les filtres linéaires (de type moyenne mobile finie)

$$\varphi(B) = I - 0,5B + 0,06B^2, \quad \theta(B) = \sum_{p=0}^{n}\left(3(0,3)^p - 2(0,2)^p\right)B^p \text{ et } \psi(B) = \theta(B)\circ\varphi(B)$$

Leurs transformées en z sont respectivement égales à

$$\varphi(z) = 1 - 0,5z + 0,06z, \quad \theta(z) = \sum_{p=0}^{n}\left(3(0,3)^p - 2(0,2)^p\right)z^p \text{ et } \psi(z) = \theta(z)\varphi(z)$$

car la transformée en z d'un produit de composition de filtres linéaires est égale au produit des transformées en z. On en déduit

$$\psi(z) = 1 + a_n z^{n+1} + b_n z^{n+2} \text{ et } \psi(B) = I + a_n B^{n+1} + b_n B^{n+2}$$

Soit $t \in \mathbb{Z}$ quelconque. On a alors

$$\begin{aligned}
X_t + a_n X_{t-n-1} + b_n X_{t-n-2} &= \psi(B)(X)_t \\
&= \theta(B)\circ\varphi(B)(X)_t \\
&= \theta(B)(\varepsilon)_t \text{ car } \varphi(B)(X)_t = \varepsilon_t \\
&= \sum_{p=0}^{n}\left(3(0,3)^p - 2(0,2)^p\right)\varepsilon_{t-p}
\end{aligned}$$

4. Soit $s < t$ et $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_s) &= \operatorname{cov}\left(\varepsilon_t, (3(0,3)^p - 2(0,2)^p)\,\varepsilon_{s-p}\right) - a_n \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-1}) - b_n \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-2}) \\
&\qquad \text{car la covariance est bilinéaire} \\
&= 0 - a_n \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-1}) - b_n \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-1}) \text{ car les } \varepsilon_s \text{ sont décorrélés}
\end{aligned}$$

Or, quand n tend vers l'infini, $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-1})$ et $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-1})$ restent bornés. En effet, il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|\operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-1})| \leq \sqrt{\operatorname{var}(\varepsilon_t)\operatorname{var}(X_{s-n-1})} = \sqrt{\sigma^2 \gamma_X(0)}$$

et de même pour $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-1})$. Comme a_n et b_n tendent vers 0 en l'infini, on en déduit

$$0 = \lim_{n \to +\infty} -a_n \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-1}) - b_n \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{s-n-1}) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_s) = \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_s)$$

Le bruit blanc ε est le processus d'innovation associé à X si $X_t - \varepsilon_t = P^{\perp}_{V^2(1, X_s, s<t)}(X_t)$ quel que soit t. Pour montrer cela, il suffit d'établir que

$$X_t - \varepsilon_t \in V^2(1, X_s, s < t) \text{ et } X_t - (X_t - \varepsilon_t) \perp V^2(1, X_s, s < t)$$

Or $X_t - \varepsilon_t = 0,5X_{t-1} - 0,06X_{t-2}$ appartient bien à $V^2(1, X_s, s < t)$ et $X_t - (X_t - \varepsilon_t) = \varepsilon_t$ est orthogonal à 1 car centré : $\langle \varepsilon_t, 1 \rangle = \mathbb{E}[\varepsilon_t 1] = 0$; et orthogonal à X_s pour tout $s < t$ d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_t, X_s \rangle &= \mathbb{E}\left[\varepsilon_t X_s\right] \\
&= \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_s) \text{ car } \varepsilon_t \text{ et } X_s \text{ sont centrés} \\
&= 0\ ;
\end{aligned}$$

ε_t est donc orthogonal à $V^2(1, X_s, s < t)$, ce qui achève de montrer que ε est le bruit blanc d'innovation de X.

5. Soit $t \geq 1$. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_0) \\
&= \operatorname{cov}\left(X_t - 0,5X_{t-1} + 0,06X_{t-2}, X_0\right) \\
&= \operatorname{cov}(X_t, X_0) - 0,5 \operatorname{cov}(X_{t-1}, X_0) + 0,06 \operatorname{cov}(X_{t-2}, X_0) \\
&= \begin{cases} \gamma_X(t) - 0,5\gamma_X(t-1) + 0,06\gamma_X(t-2) & \text{si } t \geq 2 \\ \gamma_X(1) - 0,5\gamma_X(0) + 0,06\gamma_X(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $\rho_X(1) = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} = \frac{0,5}{1,06}$ et

$$\forall t \geq 2,\ \ \rho_X(t) - 0,5\rho_X(t-1) + 0,06\rho_X(t-2) = \frac{1}{\gamma_X(0)}\left(\gamma_X(t) - 0,5\gamma_X(t-1) + 0,06\gamma_X(t-2)\right) = 0.$$

La fonction d'autocorrélation vérifie donc une équation de récurrence linéaire. On cherche les solutions sous la forme r^t :

$$\begin{aligned}
& \forall t \in \mathbb{Z},\quad r^t - 0,5r^{t-1} + 0,06r^{t-2} = 0 \\
\iff\ & r^2 - 0,5r + 0,06 = 0 \\
\iff\ & r = 0,2 \text{ ou } r = 0,3
\end{aligned}$$

La forme générale des solutions est donc $A\,(0,2)^t + B\,(0,3)^t$. Comme $\rho_X(0) = 1$ et $\rho_X(1) = \frac{0,5}{1,06}$, A et B doivent vérifier le système

$$\left\{ \begin{array}{rl} A+B & = 1 \\ 0,2A + 0,3B & = \frac{0,5}{1,06} \end{array} \right.$$

On en déduit $A = -\frac{91}{53}$ et $B = \frac{144}{53}$. La fonction d'autocorrélation vaut donc

$$\forall t \geq 0, \quad \rho_X(t) = -\frac{91}{53}\,(0,2)^t + \frac{144}{53}\,(0,3)^t$$

6. Soit r_X la fonction d'autocorrélation partielle de X. On a $r_X(1) = \rho_X(1) = \frac{0,5}{1,06}$. Comme X est un AR(2), on a aussi $r_X(h) = 0$ pour tout $h > 2$. Reste à déterminer $r_X(2)$. La matrice des autocorrélations $R_X(2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0,5}{1,06} \\ \frac{0,5}{1,06} & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. On en déduit que $r_X(2)$ est donné par le coefficient $\alpha_2^{(2)}$ dans la décomposition

$$P^{\perp}_{V^2(1,X_{t-1},X_{t-2})}(X_t) = \alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)} X_{t-1} + \alpha_2^{(2)} X_{t-2}$$

Or

$$P^{\perp}_{V^2(1,X_{t-1},X_{t-2})}(X_t) = P^{\perp}_{V^2(1,X_{t-1},X_{t-2})}(\varepsilon_t + 0,5X_{t-1} - 0,06X_{t-2}) = 0 + 0,5X_{t-1} - 0,06X_{t-2}$$

car ε_t est orthogonal à $V^2(1, X_{t-1}, X_{t-2})$ - c'est le bruit blanc d'innovation - et X_{t-1}, X_{t-2} appartiennent à $V^2(1, X_{t-1}, X_{t-2})$. Il en résulte $r_X(2) = -0,06$. Notons qu'on aurait pu aussi utiliser les équations de Yule-Walker pour ce calcul.

Ex 4.

1. Si A et B sont deux variables aléatoires de carré intégrable, alors elles sont intégrables :

$$\mathbb{E}\,[|A|] \leq \sqrt{\mathbb{E}\,[A^2]} < +\infty \text{ et } \mathbb{E}\,[|B|] \leq \sqrt{\mathbb{E}\,[B^2]} < +\infty$$

Leurs espérances $\mathbb{E}\,[A]$ et $\mathbb{E}\,[B]$ existent, leurs variances $\mathrm{var}(A) = \mathbb{E}\left[A^2\right] - \mathbb{E}\,[A]^2$ et $\mathrm{var}(B) = \mathbb{E}\left[B^2\right] - \mathbb{E}\,[B]^2$ sont bien définies, et leur covariance aussi car

$$\mathbb{E}\,[|(A - \mathbb{E}\,[A])\,(B - \mathbb{E}\,[B])|] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[(A - \mathbb{E}\,[A])^2\right]\mathbb{E}\left[(B - \mathbb{E}\,[B])^2\right]} = \sqrt{\mathrm{var}(A)\,\mathrm{var}(B)} < +\infty$$

La covariance $\mathrm{cov}(A, B) = \mathbb{E}\,[(A - \mathbb{E}\,[A])\,(B - \mathbb{E}\,[B])]$ existe donc. On applique ces résultats à X_s, X_t, Y_s et Y_t qui sont toutes des variables de carré intégrable quels que soient s et t.

2. Le processus Z n'est pas nécessairement faiblement stationnaire. Il le serait par exemple si on supposait de plus que X et Y sont décorrélés. Voici un contre-exemple : soit X est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 ; on pose $Y_t = (-1)^t X_t$

$$Y_t = \left\{ \begin{array}{ll} X_t & \text{si } t \text{ est multiple de 3} \\ -X_t & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que $Y = (Y_t = (-1)^t X_t)$ est aussi un bruit blanc gaussien, et donc faiblement stationnaire. Mais on a

$$\gamma_Z(0,0) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix} \neq \gamma_Z(1,1) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Le processus Z n'est donc pas faiblement stationnaire.

3. Soit $s,t \in \mathbb{Z}$. On a $X_t = \varepsilon_t^{(1)} - 0,02\varepsilon_{t-1}^{(1)} + 0,24\varepsilon_{t-1}^{(2)}$ et $Y_t = \varepsilon_t^{(2)} + 0,24\varepsilon_{t-1}^{(1)} + 0,12\varepsilon_{t-1}^{(2)}$. On en déduit $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Y_t] = 0$ car $\varepsilon^{(1)}$ et $\varepsilon^{(2)}$ sont des processus centrés. μ_Z est donc constant, et nul.
Calculons la fonction d'autocovariance :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_s, X_t) &= \operatorname{cov}\left(\varepsilon_s^{(1)} - 0,02\varepsilon_{s-1}^{(1)} + 0,24\varepsilon_{s-1}^{(2)}, \varepsilon_t^{(1)} - 0,02\varepsilon_{t-1}^{(1)} + 0,24\varepsilon_{t-1}^{(2)}\right) \\
&= \operatorname{cov}\left(\varepsilon_s^{(1)}, \varepsilon_t^{(1)}\right) - 0,02\operatorname{cov}\left(\varepsilon_s^{(1)}, \varepsilon_{t-1}^{(1)}\right) + 0,24\operatorname{cov}\left(\varepsilon_s^{(1)}, \varepsilon_{t-1}^{(2)}\right) \\
&\quad -0,02\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{s-1}^{(1)}, \varepsilon_t^{(1)}\right) + 0,02^2\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{s-1}^{(1)}, \varepsilon_{t-1}^{(1)}\right) - 0,02 \times 0,24\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{s-1}^{(1)}, \varepsilon_{t-1}^{(2)}\right) \\
&\quad +0,24\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{s-1}^{(2)}, \varepsilon_t^{(1)}\right) - 0,24 \times 0,02\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{s-1}^{(2)}, \varepsilon_{t-1}^{(1)}\right) + 0,24^2\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{s-1}^{(2)}, \varepsilon_{t-1}^{(2)}\right) \\
&= \operatorname{cov}\left(\varepsilon_s^{(1)}, \varepsilon_t^{(1)}\right) - 0,02\operatorname{cov}\left(\varepsilon_s^{(1)}, \varepsilon_{t-1}^{(1)}\right) + 0 \\
&\quad -0,02\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{s-1}^{(1)}, \varepsilon_t^{(1)}\right) + 0,02^2\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{s-1}^{(1)}, \varepsilon_{t-1}^{(1)}\right) + 0 \\
&\quad +0 + 0 + 0,24^2\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{s-1}^{(2)}, \varepsilon_{t-1}^{(2)}\right) \text{ car } \varepsilon^{(1)} \text{ et } \varepsilon^{(2)} \text{ sont décorrélées} \\
&= \sigma^2\left(\mathbf{1}_{s=t} - 0,02\mathbf{1}_{s=t-1} - 0,02\mathbf{1}_{s-1=t} + 0,02^2\mathbf{1}_{s-1=t-1} + 0,24^2\mathbf{1}_{s-1=t-1}\right) \\
&\qquad \text{car } \varepsilon^{(1)} \text{ et } \varepsilon^{(2)} \text{ sont des bruits blancs} \\
&= \sigma^2\left(\left(1 + 0,02^2 + 0,24^2\right)\mathbf{1}_{|t-s|=0} - 0,02\mathbf{1}_{|t-s|=1}\right)
\end{aligned}$$

On calcule de même les autres coefficients de $\gamma_Z(s,t)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_s, Y_t) &= \operatorname{cov}(X_t, Y_s) = \sigma^2\left((-0,02 \times 0,24 + 0,24 \times 0,12)\mathbf{1}_{|t-s|=0} + 0,24\mathbf{1}_{|t-s|=1}\right) \\
\operatorname{cov}(Y_s, Y_t) &= \sigma^2\left(\left(1 + 0,24^2 + 0,12^2\right)\mathbf{1}_{|t-s|=0} + 0,12\mathbf{1}_{|t-s|=1}\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\gamma_Z = \begin{cases} \sigma^2\begin{pmatrix} \left(1 + 0,02^2 + 0,24^2\right) & (-0,02 \times 0,24 + 0,24 \times 0,12) \\ (-0,02 \times 0,24 + 0,24 \times 0,12) & \left(1 + 0,24^2 + 0,12^2\right) \end{pmatrix} & \text{si } |t-s| = 0 \\ \sigma^2\begin{pmatrix} -0,02 & 0,24 \\ 0,24 & 0,12 \end{pmatrix} & \text{si } |t-s| = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } |t-s| \geq 2 \end{cases}$$

$\gamma_Z(s,t)$ ne dépend que de $|t-s|$. On a donc pour tout $h \in \mathbb{Z}$ $\gamma_Z(s,t) = \gamma_Z(s+h, t+h)$. Ce qui achève de montrer que Z est faiblement stationnaire.

4. Il suffit d'additionner. Soit $t \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcl} Z_t & = & \varepsilon_t + \Theta\varepsilon_{t-1} \\ -\Theta Z_{t-1} & = & -\Theta\varepsilon_{t-1} - \Theta^2\varepsilon_{t-2} \\ \Theta^2 Z_{t-2} & = & \Theta^2\varepsilon_{t-2} - \Theta^3\varepsilon_{t-3} \\ \vdots & & \vdots \\ (-1)^n\Theta^n Z_{t-n} & = & (-1)^n\Theta^n\varepsilon_{t-n} + (-1)^n\Theta^{n+1}\varepsilon_{t-n-1} \\ & & \\ \displaystyle\sum_{u=0}^{n}(-1)^u\Theta^u Z_{t-u} & = & \varepsilon_t + (-1)^n\Theta^{n+1}\varepsilon_{t-n-1} \end{array}$$

5. On démontre la formule par récurrence. Elle est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la vraie pour n. Alors

$$\begin{array}{rcl} \Theta^{n+1} & = & \Theta^n \times \Theta \\ & = & \begin{pmatrix} 0,36\,(0,3)^n + 0,64\,(-0,2)^n & 0,48\,((0,3)^n - (-0,2)^n) \\ 0,48\,((0,3)^n - (-0,2)^n) & 0,64\,(0,3)^n + 0,36\,(-0,2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0,02 & 0,24 \\ 0,24 & 0,12 \end{pmatrix} \\ & & \text{en appliquant l'hypothèse de récurrence} \\ & = & \begin{pmatrix} 0,36\,(0,3)^{n+1} + 0,64\,(-0,2)^{n+1} & 0,48\left((0,3)^{n+1} - (-0,2)^{n+1}\right) \\ 0,48\left((0,3)^{n+1} - (-0,2)^{+1}n\right) & 0,64\,(0,3)^{n+1} + 0,36\,(-0,2)^{n+1} \end{pmatrix} \\ & & \text{après calculs...} \end{array}$$

Pour établir que $\varepsilon_t^{(1)} = X_t - P^{\perp}_{V^2(1,X_s,Y_s,s<t)}(X_t)$, il suffit de montrer que $X_t - \varepsilon_t^{(1)}$ appartient à $V^2(1, X_s, Y_s, s < t)$ et que $X_t - (X_t - \varepsilon_t^{(1)}) = \varepsilon_t^{(1)}$ est orthogonal à $V^2(1, X_s, Y_s, s < t)$. Le dernier point est le plus simple. $\varepsilon^{(1)}$ est un bruit blanc ; $\varepsilon_t^{(1)}$ est donc centré, i.e. orthogonal à 1. De plus, il est orthogonal à $\varepsilon_s^{(1)}$ pour tout $s < t$ et orthogonal aussi $\varepsilon_s^{(2)}$ pour tout s. Il est donc orthogonal à X_s et Y_s pour tout $s < t$. Ce qui montre $\varepsilon_t^{(1)} \perp V^2(1, X_s, Y_s, s < t)$.
Pour montrer le premier point, il suffit de montrer que $X_t - \varepsilon_t^{(1)}$ est limite, au sens de la norme hilbertienne, d'éléments de $V^2(1, X_s, Y_s, s < t)$. Or, d'après la question 4 et le calcul ci-dessus, on a

$$\begin{array}{l} X_t - \varepsilon_t^{(1)} + \sum_{p=1}^{n}(-1)^p\,((0,36\,(0,3)^p + 0,64\,(-0,2)^p)X_{t-p} + 0,48\,((0,3)^p - (-0,2)^p)\,Y_{t-p}) \\ = (-1)^n\left((0,36\,(0,3)^{n+1} + 0,64\,(-0,2)^{n+1})\varepsilon_{t-n-1}^{(1)} + 0,48\left((0,3)^{n+1} - (-0,2)^{n+1}\right)\varepsilon_{t-n-1}^{(2)}\right) \end{array}$$

Comme la norme du second membre

$$\begin{array}{l} \left\|(-1)^n\left((0,36\,(0,3)^{n+1} + 0,64\,(-0,2)^{n+1})\varepsilon_{t-n-1}^{(1)} + 0,48\left((0,3)^{n+1} - (-0,2)^{n+1}\right)\varepsilon_{t-n-1}^{(2)}\right)\right\|_2 \\ = \sqrt{\sigma^2\left(\left(0,36\,(0,3)^{n+1} + 0,64\,(-0,2)^{n+1}\right)^2 + \left(0,48\left((0,3)^{n+1} - (-0,2)^{n+1}\right)\right)^2\right)} \end{array}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on en déduit que $X_t - \varepsilon_t^{(1)}$ est la limite de la suite $\left(\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\,((0,36\,(0,3)^p + 0,64\,(-0,2)^p)X_{t-p} + 0,48\,((0,3)^p - (-0,2)^p)\,Y_{t-p})\,, n \geq 1\right)$ d'éléments de $V^2(1, X_s, Y_s, s < t)$. Ce qui permet de conclure la démonstration.