

Statistique des Processus - Maîtrise MASS

Examen du 21 mai 2004

9h - 12h

Les documents sont autorisés.

Dans tout le sujet, B désigne l'opérateur retard.

Le sujet comporte trois pages.

Ex 1. Pour des variables aléatoires possédant des moments d'ordre supérieur à 2, on peut généraliser les notions de moyenne et de variance/covariance, en définissant les cumulants. Plus précisément, soit $k \geq 1$ un entier, et X_1, \dots, X_k des variables aléatoires telles que $\mathbb{E} [|X_i|^k] < +\infty$ pour tout i ; on pose

$$C^{(k)}(X_1, \dots, X_k) = \sum_{p=1}^k (-1)^{p-1} (p-1)! \sum_{\{U_1, \dots, U_p\} \in \mathcal{P}(k)} \mathbb{E} \left[\prod_{j \in U_1} X_j \right] \cdots \mathbb{E} \left[\prod_{j \in U_p} X_j \right]$$

avec $\mathcal{P}(k)$ l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, k\}$. On appelle $C^{(k)}(X_1, \dots, X_k)$ le cumulants d'ordre k de (X_1, \dots, X_k) . Exemples :

$$\begin{aligned} C^{(1)}(X_1) &= \mathbb{E}[X_1] \\ C^{(2)}(X_1, X_2) &= \text{cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Certaines des propriétés de ces cumulants sont (plus ou moins) élémentaires :

$$\begin{aligned} C^{(k)}(X_1 + X'_1, X_2, \dots, X_k) &= C^{(k)}(X_1, X_2, \dots, X_k) + C^{(k)}(X'_1, X_2, \dots, X_k) \\ C^{(k)}(X_1, X_2, \dots, X_k) &= 0 \text{ si } k \geq 2 \text{ et si } X_1 \text{ est indépendant de } X_2, \dots, X_k \end{aligned}$$

1. Soit $\mu \in \mathbb{R}$; montrer que $C^{(k)}(X_1 + \mu, X_2, \dots, X_k) = C^{(k)}(X_1, X_2, \dots, X_k)$ si $k \geq 2$.
2. Calculer $C^{(3)}(X_1, X_2, X_3)$ lorsque X_1, X_2 et X_3 sont centrés, puis dans le cas général.
3. On suppose maintenant que $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus stationnaire tel que $\mathbb{E} [|X_0|^3] < +\infty$. On note $C_X^{(3)}(t_1, t_2, t_3)$ le cumulants $C^{(3)}(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3})$. Montrer que $C_X^{(3)}(t_1, t_2, t_3) = C_X^{(3)}(t_1 + h, t_2 + h, t_3 + h)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
4. On note désormais $C_X^{(3)}(s, t) = C_X^{(3)}(0, s, t)$ pour tous $0 \leq s \leq t$. Soit ε un bruit blanc fort. Calculer $C_\varepsilon^{(3)}(s, t)$, puis $C_X^{(3)}(s, t)$ avec $X_u = \varepsilon_u + \theta \varepsilon_{u-1}$ pour tout $u \in \mathbb{Z}$ dans les deux cas suivants :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \mathbb{P}(\varepsilon_t = 1) &= 2\mathbb{P}(\varepsilon_t = -2) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

5. On suppose connus X_1, \dots, X_N . Proposer un estimateur de $C_X^{(3)}(s, t)$.

Ex 2. Soit X un processus faiblement stationnaire, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. On définit le filtre linéaire $\psi(B) = (I - \alpha B)^{-1} \circ (I - \frac{1}{\alpha} B)$, et on pose $Y = \psi(B)(X)$.

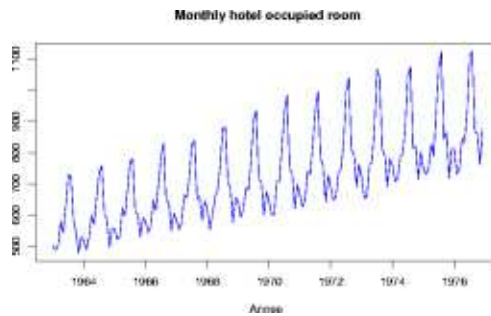
1. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on pose $\varphi(t) = \gamma_X(t) - \alpha^2 \gamma_Y(t)$, avec γ_X (resp. γ_Y) la fonction d'autocovariance de X (resp. Y). Montrer que φ vérifie la relation de récurrence

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(t) - \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \varphi(t - 1) + \varphi(t - 2) = 0.$$

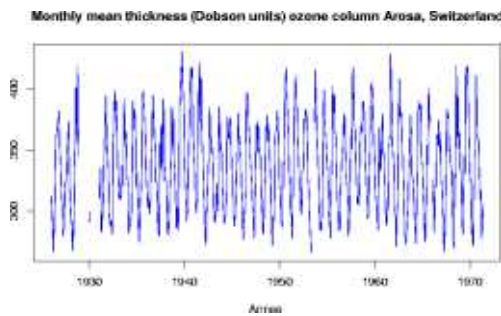
2. Donner la solution générale de cette équation de récurrence. En déduire que $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Indication : on pourra faire tendre t vers $-\infty$ et $+\infty$.
3. Application : montrer que si X est un bruit blanc, alors Y l'est aussi.

Ex 3. Pour chacune des séries suivantes, proposer en le justifiant un modèle (S)AR(I)MA (sans préciser les ordres p et q du processus ARMA intégré).

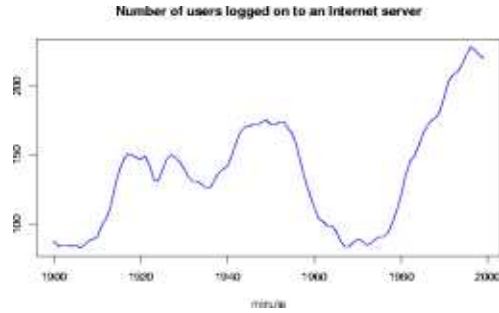
1. Nombre de chambres d'hôtel occupées (relevés mensuels) :



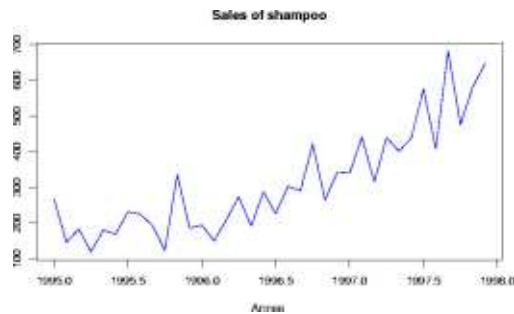
2. Épaisseur de la couche d'ozone (relevés mensuels) :



3. Nombre d'internautes en ligne (relevés toutes les minutes) :



4. Ventes de shampoing (relevés mensuels) :



Ex 4. Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus AR(2) vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - 0,1X_{t-1} - 0,3X_{t-2} = \varepsilon_t$$

avec ε bruit blanc de variance σ^2 .

1. Montrer que ε est le bruit blanc d'innovation de X .
2. Déterminer la représentation MA(∞) de X en fonction de ε .
3. Calculer la fonction d'autocorrélation de X .
4. Pour tout $t \geq 1$, on pose $\tilde{\varepsilon}_t = X_t - P_{V^2(1, X_1, \dots, X_{t-1})}^\perp(X_t)$. Exprimer $\tilde{\varepsilon}_t$ comme combinaison linéaire de $X_s, s \in \mathbb{Z}$ pour toute valeur de $t \geq 1$.

Ex 5. Soit $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus ARMA(1,2) vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, Y_t - 2,5Y_{t-1} = \varepsilon_t - 0,04\varepsilon_{t-2}$$

avec ε un bruit blanc de variance σ^2 .

1. Déterminer le bruit blanc d'innovation de Y en fonction de ε et préciser sa variance.
2. On suppose connus $(Y_s, s \leq N)$. On note $\tilde{Y}_N(h) = P_{V^2(Y_s, s \leq N)}^\perp(Y_{N+h})$ le prédicteur linéaire de Y_{N+h} . Déterminer une équation de récurrence vérifiée par le fonction de prévision $(\tilde{Y}_N(h), h \geq 1)$ en précisant bien à partir de quelle valeur de h elle est valable. Résoudre cette équation en fonction des valeurs pivôtales.
3. Calculer l'erreur de prédiction $\|Y_{N+h} - \tilde{Y}_N(h)\|_2^2$.