Université de Paris 5 – René Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Statistique des Processus - Maîtrise MASS

Partiel du 22 mars 2004

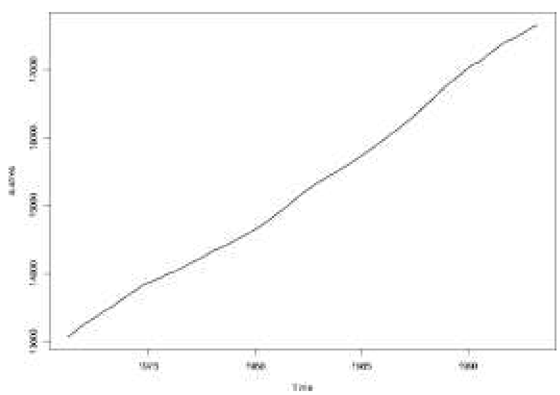
15h30 - 18h30

Les documents ne sont pas autorisés.

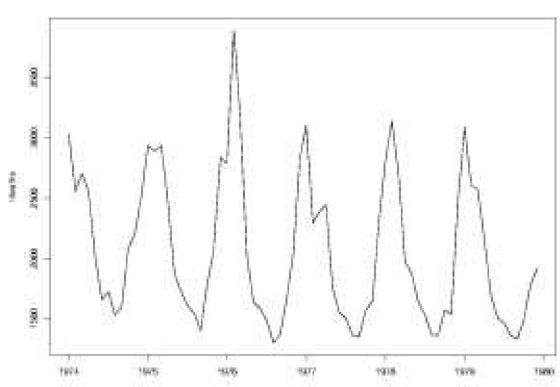
Le sujet comporte quatre pages.

Ex 1. Pour chacune des séries suivantes, proposer un modèle linéaire, éventuellement après une transformation initiale à justifier, en précisant bien les paramètres, l'ensemble des paramètres et le rang du modèle. Indiquer aussi comment réaliser une estimation préliminaire de la tendance à l'aide d'une moyenne mobile que l'on décrira.

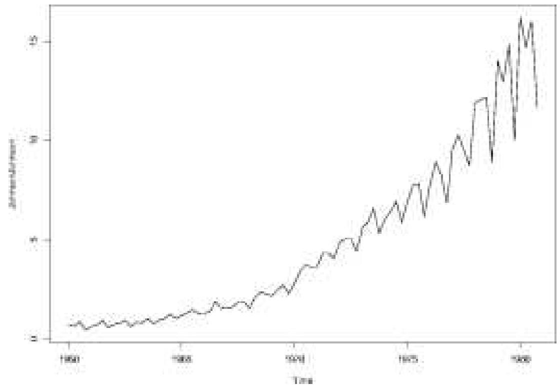
1. Nombre (en milliers) de résidents australiens entre mars 1971 et mars 1994, mesuré chaque trimestre :



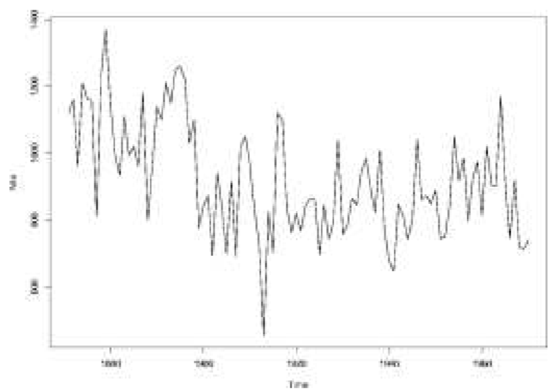
2. Mortalité mensuelle d'origine pulmonaire en Grande-Bretagne, entre 1974 et 1979 :



3. Bénéfices trimestriels par action Johnson&Johnson entre 1960 et 1980 :



4. Mesure du débit moyen annuel du Nil à Assouan, entre 1871 et 1970 :



Ex 2. On souhaite valider le modèle construit pour la dernière des séries précédentes.

1. Préciser ce que l'on entend par résidu du modèle.
2. À la série des résidus, on applique le test du porte-manteau, dit de Box-Pierce (au rang 12). Préciser la zone de rejet du test.
3. Après application numérique, on trouve le degré de signification du test égal à 0,14. Qu'en conclut-on ?

Ex 3. Soit $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus faiblement stationnaire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - 0,5X_{t-1} + 0,06X_{t-2} = \varepsilon_t$$

avec $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc de variance σ^2.

1. Montrer que le processus X est centré.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{10}{3}, 5\right\}$ on a

$$\frac{1}{1 - 0,5z + 0,06z^2} = \frac{3}{1 - 0,3z} - \frac{2}{1 - 0,2z}$$

et

$$\left(1-0,5z+0,06z^2\right)\sum_{p=0}^{n}\left(3(0,3z)^p-2(0,2z)^p\right)=1+a_nz^{n+1}+b_nz^{n+2}$$

avec $(a_n, n\geq 1)$ et $(b_n, n\geq 1)$ deux suites de limite nulle en l'infini.

3. En déduire

$$\forall t\in\mathbb{Z},\quad X_t+a_nX_{t-n-1}+b_nX_{t-n-2}=\sum_{p=0}^{n}\left(3(0,3)^p-2(0,2)^p\right)\varepsilon_{t-p}$$

4. En s'aidant du résultat précédent, montrer que pour tous $s<t$ on a $\mathrm{cov}(\varepsilon_t, X_s)=0$, puis que ε est le bruit blanc d'innovation de X.
5. Montrer que sa fonction d'autocorrélation vérifie l'équation de récurrence

$$\forall t\geq 2,\quad \rho_X(t)-0,5\rho_X(t-1)+0,06\rho_X(t-2)=0$$

Montrer que $\rho_X(1)=\frac{0,5}{1,06}$, et calculer $\rho_X(t)$ pour tout $t\in\mathbb{N}$.

6. Calculer la fonction d'autocorrélation partielle de X.

Ex 4. Soit $X=(X_t, t\in\mathbb{Z})$ et $Y=(Y_t, t\in\mathbb{Z})$ deux processus du second ordre. On définit le processus bivarié $Z=(Z_t, t\in\mathbb{Z})$ en posant $Z_t=\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$, variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On note

$$\begin{aligned}\mu_Z(t) &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[X_t\right] \\ \mathbb{E}\left[Y_t\right] \end{pmatrix}\\ \gamma_Z(s,t) &= \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X_s,X_t) & \mathrm{cov}(X_s,Y_t) \\ \mathrm{cov}(Y_s,X_t) & \mathrm{cov}(Y_s,Y_t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

sa fonction moyenne (vectorielle) et sa fonction d'autocovariance (matricielle).

1. Montrer que ces fonctions sont bien définies.
2. On dit que le processus est faiblement stationnaire si et seulement si pour tous $s,t,h\in\mathbb{Z}$ on a $\mu_Z(t)=\mu_Z(t+h)$ et $\Gamma_Z(s,t)=\Gamma_Z(s+h,t+h)$. Si on suppose X et Y faiblement stationnaires, a-t'on Z faiblement stationnaire ?
3. Soit $\varepsilon^{(1)}=\left(\varepsilon_t^{(1)}, t\in\mathbb{Z}\right)$ et $\varepsilon^{(2)}=\left(\varepsilon_t^{(2)}, t\in\mathbb{Z}\right)$ deux bruits blancs décorrélés de même variance σ^2. On définit $\varepsilon_t=\begin{pmatrix} \varepsilon_t^{(1)} \\ \varepsilon_t^{(2)} \end{pmatrix}$. On suppose que Z vérifie

$$\forall t\in\mathbb{Z},\quad Z_t=\varepsilon_t+\Theta\varepsilon_{t-1}$$

avec $\Theta=\begin{pmatrix} -0,02 & 0,24 \\ 0,24 & 0,12 \end{pmatrix}$. Déterminer μ_Z et γ_Z, et montrer que Z est un processus faiblement stationnaire.

4. Quelle est la nature des processus X et Y ?
5. Montrer que pour tout $n\geq 1$ on a

$$\forall t\in\mathbb{Z},\ Z_t-\Theta Z_{t-1}+\Theta^2Z_{t-2}+\cdots+(-1)^n\Theta^nZ_{t-n}=\varepsilon_t+(-1)^n\Theta^{n+1}\varepsilon_{t-n-1}$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\Theta^n = \begin{pmatrix} 0,36\,(0,3)^n + 0,64\,(-0,2)^n & 0,48\,((0,3)^n - (-0,2)^n) \\ 0,48\,((0,3)^n - (-0,2)^n) & 0,64\,(0,3)^n + 0,36\,(-0,2)^n \end{pmatrix}$$

En déduire que $\varepsilon_t^{(1)} = X_t - P^{\perp}_{V^2(1,X_s,Y_s,s<t)}(X_t)$ et $\varepsilon_t^{(2)} = Y_t - P^{\perp}_{V^2(1,X_s,Y_s,s<t)}(Y_t)$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$.